БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 7

И. М. ЯГЛОМ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I

ДВИЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1955

11-3-1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга, состоящая из двух томов, посвящена элементарной геометрии. В течение главным образом XIX века в элементарной геометрии был накоплен весьма обширный материал. Было доказано много красивых и неожиданных теорем о кругах, треугольниках, многоугольниках и т. д.; из элементарной геометрии выделились даже целые «науки», как геометрия треугольника или геометрия тетраэдра, имеющие своеобразную, достаточно обширную тематику, свои задачи и свои методы решения этих задач.

Однако настоящая книга вовсе не ставит своей целью лишь познакомить читателя с рядом новых для него теорем. Нам кажется, что всё сказанное выше само по себе ещё никак не оправдывает появления обстоятельных монографий, посвящённых элементарной геометрии, ибо большинство теорем элементарной геометрии, выходящих за пределы школьного курса, лишь забавно, но бесполезно и лежит далеко в стороне от основной линии развития математической науки. Но, кроме конкретных теорем, элементарная геометрия содержит ещё две большие общие идеи, которые легли в основу всего дальнейшего развития геометрии и значение которых далеко выходит даже за эти достаточно широкие рамки. Речь идёт о дедуктивном методе и аксиоматическом обосновании геометрии, во-первых, и о геометрических преобразованиях и теоретико-групповом обосновании геометрии, во-вторых. Эти идеи очень содержательны и плодотворны; так, обе они в своём непосредственном развитии приводят к неевклидовым геометриям. Раскрытие одной из этих идей — идеи теоретико-группового обоснования геометрии — и составляет основную задачу книги.

Книга разбита на три части, последняя из которых, составляющая содержание второго тома, значительно больше остальных; причины такого разбиения на части выясняются во введениях к частям. Два тома книги по своему характеру несколько отличны один от другого (об этом см. введение к третьей части). Первый том, посвящённый движениям и преобразованиям подобия, более непосредственно примыкает к школьному материалу; может быть, поэтому он несколько скучнее второго. Во втором томе, посвящённом линейным и круговым (иными словами—проективным и конформным) преобразованиям[1]), основное внимание уделяется возможности применения этих преобразований к элементарной геометрии; соответственно этому изложение иногда строится в форме указаний к решению задач (см., например, начало § 3 гл. I третьей части). При этом линейные и круговые преобразования здесь трактуются совершенно одинаково, вопреки установившейся традиции, согласно которой инверсия всегда относится к элементарной геометрии, а аффинные и проективные преобразования — к высшей. Приложения к главам I и II третьей части посвящены неевклидовой геометрии Лобачевского; они тесно примыкают к соответствующим главам и широко используют их результаты.

Скажем ещё несколько слов о характере книги. Она рассчитана на довольно широкий круг читателей (об этом см. «Указания к пользованию книгой», стр. 8), а в таких случаях всегда приходится жертвовать интересами одних читателей ради интересов других. Автор всюду старался жертвовать интересами квалифицированных читателей и более стремился к простоте и наглядности, чем к строгости и логической отточенности: Соответственно этому в книге, например, не определяется общее понятие геометрического преобразования, так как определение интуитивно ясных понятий всегда затрудняет неопытного читателя. По этой же причине пришлось отказаться от использования направленных углов и отложить до второй главы введение направленных отрезков, хотя из-за этого некоторые рассуждения в основном тексте и в решениях задач, строго говоря, приходится считать неполными (см., например, доказательства на стр. 50). Нам кажется, что во всех этих случаях более подготовленный читатель сумеет самостоятельно дополнить изложение, а для менее подготовленного некоторая нестрогость не явится дефектом. Стремлением к элементарности объясняется и то, что расширение плоскости путём введения «идеальных» элементов в третьей части книги

[1]) См. содержание второго тома на стр. 282.

производится с некоторым запозданием, что вынуждает в ходе изложения вносить исправления в первоначальные формулировки.

Наконец, те же соображения играли большую роль и при выборе терминологии. Автор ещё в школьные годы на собственном опыте убедился в том, насколько затрудняет чтение книги обилие в ней незнакомых названий, и поэтому стремился быть в этом отношении максимально экономным. При этом пришлось в некоторых случаях отказаться от использования принятых наименований, т. е. и здесь пренебречь интересами квалифицированных читателей. В книге не встречаются слова «коллинеарность», «инцидентность», «инволюция», «корреляция», «гомология» и многие другие, хотя соответствующие понятия играют значительную роль и было бы удобно иметь для них специальные термины. Вместо названия «аффинные преобразования» употребляется более простой термин «линейные преобразования» (переводящие прямые линии в прямые линии), вместо «проективных преобразований» часто говорится об «обобщённых линейных преобразованиях», вместо «конформных преобразований» (в том смысле, в каком этот термин применяется в геометрии) — о «круговых преобразованиях». Наконец, в связи с тем, что в школе говорят о «перпендикулярных прямых» и о «сложении движений», в книге речь идёт о «перпендикулярных окружностях» (а не об «ортогональных») и о «сложении преобразований» (а не об «умножении»). Разумеется, такие выражения, как «сумма проективных преобразований» (вместо «произведения») или «противоположное преобразование» (вместо «обратного»), для специалистов звучат непривычно, но для неопытного читателя они, вероятно, окажутся понятнее распространённых.

Заметим ещё, что в связи с отсутствием книг по геометрическим преобразованиям в ряде случаев терминология оказалась совершенно не разработанной — это относится не только к материалу § 5 гл. II третьей части, никогда не излагавшемуся в учебной или в научно-популярной литературе, но даже к совершенно элементарным вопросам, которым посвящён § 2 гл. I второй части. В этих случаях автору приходилось самому предлагать новые наименования; насколько они удачны — предоставляется судить читателям. Наоборот, в геометрии треугольника, которой посвящены многие задачи, терминология является «слишком разработанной», и автор счёл нужным почти полностью отказаться от принятых названий, которые часто создают ложное впечатление о «важности» малозначительных понятий и предложений [1]).

Рукопись книги проверялась автором в его работе в Орехово-Зуевском пединституте — часть первая, гл. I из второй части и §§ 1, 2 и (частично) 4 из гл. II третьей части, вместе с введениями к частям, составляли содержание раздела «Планиметрия» курса элементарной геометрии, а гл. I третьей части существенно использовалась в курсе проективной геометрии. Происхождение книги связано с работой автора в геометрической секции школьного математического кружка при Московском государственном университете. При этом программа секции была значительно шире содержания книги,— опасаясь чрезмерно увеличить объём книги, автор был вынужден весьма сильно ограничить её рамки (о материале по теории преобразований, не вошедшем в книгу, см., например, стр. 10—11 «Указаний к пользованию книгой»). Следует заметить, что во многих случаях такое самоограничение было вовсе не добровольным — правда, благодаря ему книга несколько выиграла в цельности, но зато заметно проиграла в содержательности.

Автор с большой признательностью вспоминает покойного Д. И. Перепёлкина, внимательно прочитавшего рукопись книги и сделавшего ряд ценных указаний. Весьма благодарен он также А. М. Яглому, явившемуся первым, очень строгим и требовательным, редактором книги, много способствовавшим её улучшению, и Я. С. Дубнову, с которым обсуждался текст введений и приложений. Наконец, автор благодарит Т. Е. Ашкинузе и Л. В. Гольдштейн, помогавших ему при изготовлении чертежей, и Э. П. Тихонову, проделавшую большую работу по редактированию книги.

И. М. Яглом

---

[1]) Читатель, знакомый с литературой по геометрии треугольника, сам найдёт в книге предложения, касающиеся точек Нагеля, Микеля, Жергона, Лемуана, Брокара и пр.

УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

Настоящая книга может представлять интерес для довольно широкого круга читателей — учащихся старших классов и учителей средних школ, студентов и преподавателей физико-математических факультетов пединститутов. При этом разные категории читателей будут использовать её по-разному. Школьнику естественно рассматривать книгу как задачник, в котором условия задач сопровождаются обширными указаниями, облегчающими решение. Задачи не следует решать все подряд, но желательно разобрать по крайней мере одну (а ещё лучше — несколько) из каждой группы задач, отмеченных сплошной чертой сбоку страницы; книга построена так, что в этом случае читатель не упустит ничего существенного из её содержания. После того как задача будет решена, следует ознакомиться с её решением, приведённым в конце книги. Введения к частям, а также приложения к гл. I и II третьей части можно вначале опустить, но так как в трёх введениях и двух приложениях сосредоточено основное идейное содержание книги, то после ознакомления с какой-либо частью следует вернуться назад и прочитать введение.

Учителю средней школы задачи следует рассматривать лишь как иллюстрации приложимости основного материала к конкретным вопросам элементарной геометрии. При этом большой материал, собранный в задачах, может оказаться полезным ему в работе с учащимися. Книга может быть использована в школьном математическом кружке (например, по такому плану: руководитель сам излагает теоретический материал, а задачи предлагает для решения участникам); кое-что из неё, быть может, можно использовать и прямо на уроке.

Студент пединститута может рассматривать книгу как пособие по курсам элементарной геометрии (первая и вторая части, а также гл. II третьей части), проективной геометрии (гл. I третьей части) и оснований геометрии (приложения к гл. I и

II третьей части; возможно также и введения к отдельным частям). Преподаватель пединститута может использовать книгу при чтении лекций по тем же курсам и при ведении упражнений по элементарной геометрии и проективной геометрии.

Первый том книги представляет самостоятельное целое. Однако автор рассчитывает, что большинство читателей не ограничится чтением только первого тома, так как второй том определённо содержательнее и интереснее первого. Последняя глава первого тома (гл. II второй части) является в некотором смысле «повторительной»; она показывает пути расширения предшествующего материала и возможность дальнейших приложений его к конкретным вопросам; в её содержании основную роль играют задачи. Так как материал этой главы отходит в сторону от основной линии изложения, то она вполне может быть опущена; в частности, читателю, намеревающемуся перейти ко второму тому книги, не следует особенно задерживаться на этой главе. Также и § 5 гл. I третьей части лежит несколько в стороне от остального содержания книги; он тоже может быть опущен при первом чтении.

Задачи рассчитаны в первую очередь на школьников и на студентов и дают возможность читателю проверить, насколько он усвоил теоретический материал. Формулировки задач, как правило, никак не связаны с остальным текстом книги; решения же опираются на основной материал и показывают, насколько плодотворно применение преобразований в элементарной геометрии. Основное внимание уделяется методам, а не результатам; поэтому ряд задач повторяется в нескольких местах книги, так как сравнение разных решений одной задачи всегда поучительно. Может оказаться также интересным сравнить приведённые в книге решения с другими, не использующими геометрических преобразований (как правило, более искусственными); для того чтобы читатель имел эту возможность, в конце каждого тома помещён список задач, иные решения которых имеются в одном из трёх распространённых сборников задач.

Задачи подбирались по возможности так, чтобы их формулировки могли заинтересовать читателя и тем самым привлечь его внимание к теоретическому материалу; в частности, здесь содержится много предложений по геометрии треугольника и многоугольника, не излагавшихся ранее в нашей литературе.

В книге приведено также много задач на построение. При их решении нигде не ставилась задача о нахождении «самого простого» (в каком бы то ни было смысле) построения — здесь автор стоял на той точке зрения, что эти задачи представляют главным образом логический интерес и не связаны с обязательным выполнением построения. Зато книга содержит довольно большой материал по принципиальным вопросам теории построений: сюда относятся вопросы возможности построений на ограниченном куске плоскости (задачи 53—54 из § 1 гл. I второй части и 119—120 из § 2 гл. I третьей части) и построений с ограниченными средствами (построения одним циркулем — задачи 239—243 из § 2 гл. II третьей части; одной линейкой — задачи 109 из § 1, 119—120 из § 2 гл. I третьей части; ограниченной линейкой — задача 121 из § 2 той же главы; параллельной линейкой — задача 155 из § 4 той же главы; одной линейкой при наличии на плоскости окружности с центром — задачи 190—193 из § 5 той же главы, или дуги окружности с центром — задачи 148 из § 3 и 154 из § 4 той же главы, или нескольких окружностей с неизвестными центрами — задача 194 из § 5 той же главы).

Для удобства преподавателей отметим несколько мест, где объём материала может быть расширен. § 1 гл. II третьей части можно рассматривать как введение в кинематическую геометрию, элементы которой послужили бы хорошим дополнением к книге; приложения к главам I и II третьей части ограничиваются неевклидовой геометрией Лобачевского (не считая весьма краткого упоминания о неевклидовой геометрии Римана во втором из этих приложений), хотя было бы желательно изложить здесь все неевклидовы геометрии Кели — Клейна. В книгу включена элементарная теория преобразований Лагерра (преобразования, переводящие окружности в окружности и прямые в прямые, но не обязательно точки в точки — см. § 5 гл. II третьей части), но в ней не содержится теория более общих преобразований Ли (преобразования, переводящие окружности в окружности, но не обязательно прямые в прямые или точки в точки), которую, повидимому, можно изложить столь же просто, как и теорию преобразований Лагерра.

Кроме того, весь материал книги можно углубить в нескольких направлениях. Так, например, в ней нигде не фигурируют стереометрические предложения [1]). Заметим, впрочем, что ограничение случаем плоскости мало отразилось на идейном содержании книги. Правда, отдел задач за счёт стереометрии можно было бы сделать значительно ярче и интереснее, но задачи в этой книге ни в какой мере не являются самоцелью.

Больше обедняет книгу отсутствие в ней элементарной теории конических сечений. Из-за этого здесь не получает ответа естественный вопрос о преобразовании окружностей при проектировании. Кроме того, теория конических сечений представляет наиболее благодарную область для приложений материала гл. I третьей части и даёт возможность весьма изящного решения ряда элементарно-геометрических вопросов. В книге также совершенно не освещены аналитические методы теории преобразований, хотя было бы очень уместно в гл. I третьей части сказать об аффинных и проективных координатах, в гл. II той же части — о тетрациклических координатах, содержание гл. I второй части и гл. II третьей части связать с комплексными числами и т. д. [2]). Наконец, материал книги можно расширить за счёт рассмотрения новых типов преобразований (например, квадратичных кремоновых преобразований); была бы также весьма уместна ещё одна, заключительная часть книги, посвящённая топологии [3]).

---

[1]) Относительно перенесения на случай пространства материала первой и второй частей и гл. II третьей части см. книги: Д. И. Перепёлкин, Курс элементарной геометрии, ч. 2, М.— Л., Гостехиздат, 1949 и Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 2, М., Учпедгиз, 1952.

[2]) Значительный материал по теории конических сечений и по аналитическим методам теории преобразований можно найти в книге: Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, М.— Л., Гостехиздат, ч. 1, 1948; ч. 2, 1949.

[3]) Преподаватель может воспользоваться книгами: Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, гл. VI, М.— Л., Гостехиздат, 1951 и Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика, гл. V, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ДВИЖЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ
ЧТО ТАКОЕ ГЕОМЕТРИЯ? (НАЧАЛО)

На первой странице учебника геометрии А. П. Киселёва для средней школы сразу после определения точки, линии, поверхности и тела и указания, что «совокупность каких бы то ни было точек, линий, поверхностей или тел, расположенных известным образом в пространстве, называется геометрической фигурой», даётся следующее определение геометрии: «*наука, рассматривающая свойства геометрических фигур, называется геометрией*». Таким образом, создаётся впечатление, что вопрос, поставленный в заглавии настоящего введения, получает ответ уже в школьном учебнике геометрии и не нуждается в том, чтобы им ещё занимались в дальнейшем.

Однако впечатление о простоте задачи определения геометрии является ошибочным. Определение Киселёва, разумеется, нельзя назвать неверным, но оно несколько неполно. Слово «свойство» имеет очень общий характер, и далеко не все свойства фигур изучаются в геометрии. Так, например, в геометрии совсем неважно, нарисован ли треугольник на белой бумаге или на чёрной доске: цвет треугольника не является предметом изучения геометрии. Правда, на это можно возразить, что геометрия изучает свойства геометрических фигур в смысле данного выше определения, а цвет — это свойство бумаги, на которой нарисована фигура, а не самой фигуры. Однако это возражение всё же может оставить чувство некоторой неудовлетворённости; для того чтобы придать ему бóльшую убедительность, хотелось бы сослаться на точное «математическое» определение того, какими же именно свойствами фигур занимается геометрия, а такого определения мы не имеем. Это чувство неудовлетворённости ещё более возрастает, если попытаться объяснить, почему расстояния от вершины нарисованного на доске треугольника до некоторых прямых, например до противоположной стороны (высота треугольника), рассматриваются в геометрии, а расстояния от вершины до других прямых, например до края доски, не рассматриваются. Такое объяснение вряд ли можно дать, если исходить только из приведённого выше определения геометрии.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, отметим, что нельзя упрекать школьный учебник за неполноту приведённого в нём определения. Определение Киселёва есть, пожалуй, единственное, которое можно предложить на первой ступени изучения геометрии. Достаточно сказать, что история геометрии насчитывает более 4000 лет, а первое научное определение геометрии, объяснение которого составляет одну из основных целей настоящей книги, было дано лишь около 80 лет тому назад (в 1872 г.) немецким математиком Ф. Клейном. Потребовалось создание Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии для того, чтобы математики ясно осознали необходимость точного определения предмета геометрии; лишь после этого выяснилось, что наглядное представление о «геометрических фигурах», предполагающее, что не может быть нескольких различных «геометрий», не может служить достаточным фундаментом для всего обширного здания геометрической науки [1]).

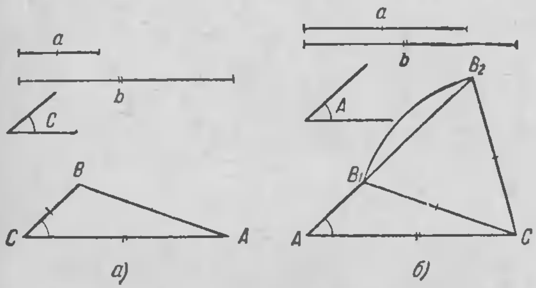
Перейдём теперь к выяснению того, какие же именно свойства геометрических фигур изучает геометрия. Мы видели, что геометрия изучает не все свойства фигур, а лишь некоторые из них; не имея ещё точного описания тех свойств, которые относятся к геометрии, мы можем сказать только, что геометрия изучает «геометрические свойства» фигур. Это уточнение определения Киселёва, разумеется, само по себе ещё не делает определение полным: ведь на вопрос о том, что такое «геометрические свойства», мы можем пока только

---

[1]) Хотя неевклидова геометрия явилась толчком, послужившим причиной появления того определения геометрии, о котором идёт речь, объяснить само это определение вполне возможно и лицам, не знакомым с геометрией Лобачевского. В частности, в настоящей книге неевклидова геометрия будет рассмотрена лишь в самом конце глав I и II третьей части после того, как определение геометрии по Клейну во всей его общности будет подробно обсуждено во введении к этой части. Нам кажется, что такой порядок расположения материала может более всего облегчить читателю понимание всей глубины замечательного творения Лобачевского.

ответить, что это «те свойства, которые изучаются геометрией». Таким образом, получается порочный круг: геометрию мы определяем как науку, изучающую геометрические свойства фигур, а геометрические свойства — как те свойства, которые изучает геометрия. Для того чтобы выбраться из этого порочного круга, нам надо определить, что такое «геометрические свойства», не пользуясь словом «геометрия».

Чтобы разобраться в вопросе о том, что такое «геометрические свойства» фигур, вспомним следующее хорошо известное утверждение: задача о построении треугольника по двум сторонам a, b и заключённому между ними углу C имеет



Черт. 1.

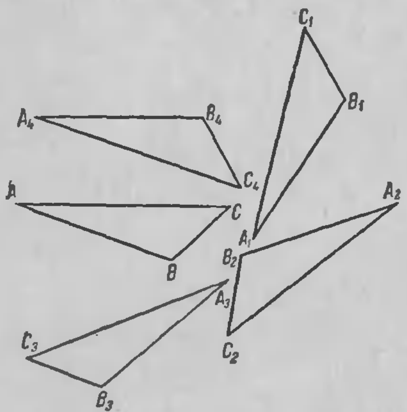
только одно решение (черт. 1, a)[1]. Если вдуматься в последнюю фразу, то она может показаться неправильной: ведь треугольников с данными сторонами a, b и данным углом C имеется не один, а бесконечно много (черт. 2), так что наша задача имеет не одно решение, а бесконечно много их. Что же в таком случае означает утверждение, что рассматриваемая задача имеет единственное решение?

Утверждение, что по двум сторонам a, b и углу C можно построить только один треугольник, очевидно, имеет только тот смысл, что все треугольники, имеющие данные стороны a, b и данный угол C, равны между собой. Таким образом, точнее было бы сказать, что по двум сторонам и углу между ними можно построить бесконечно много треугольников, однако все они будут равны между собой. Когда же в геометрии

---

[1]) В противоположность этому задача о построении треугольника по сторонам a, b и углу A, противолежащему одной из данных сторон, может иметь два решения (черт 1, $б$).

говорится, что существует единственный треугольник, имеющий данные стороны a, b и данный угол C, то тем самым равные треугольники, отличающиеся лишь своим расположением, не считаются различными. А так как геометрию мы определили как науку, изучающую «геометрические свойства» фигур, то очевидно, что только фигуры, имеющие одни и те же геометрические свойства, нельзя отличить одну от другой. Таким образом, равные фигуры должны иметь одинаковые геометрические свойства; обратно, не равные между собой фигуры должны иметь различные геометрические свойства, так как иначе они были бы неразличимы.



Черт. 2.

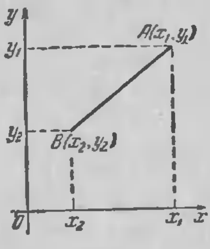
Итак, мы пришли к требуемому определению геометрических свойств фигур: *геометрическими свойствами фигур называются те свойства, которые являются общими для всех равных между собой фигур.* Теперь мы можем точно ответить на вопрос о том, почему, например, расстояние какой-либо вершины треугольника от края доски не изучается геометрией: это расстояние не является геометрическим свойством, так как оно может быть различным для равных треугольников. Наоборот, высота треугольника является геометрическим свойством, так как соответствующие высоты равных треугольников всегда равны.

Теперь мы уже значительно приблизились к определению геометрии. Мы знаем, что геометрия изучает «геометрические свойства» фигур, т. е. те свойства, которые совпадают у равных фигур. Нам остаётся только ответить на вопрос о том, что такое равные фигуры.

Последний вопрос может сначала разочаровать читателя и создать у него впечатление, что пока ещё не достигнуто никакого успеха: мы только свели один вопрос к другому, столь же трудному. Однако на самом деле это не так: вопрос о том, что такое равные фигуры, вовсе не труден, и на него учебник Киселёва даёт совершенно удовлетворительный ответ. Согласно Киселёву «*две геометрические фигуры называются равными, если перемещением одной из них в пространстве её можно совместить со второй фигурой, так что обе фигуры совместятся во всех своих частях*». Другими словами, равные фигуры — это те, которые можно совместить движением; следовательно, геометрические свойства фигур, т. е. свойства, общие всем равным фигурам,— это те свойства, которые не меняются при движении фигуры.

Итак, окончательно мы приходим к следующему определению геометрии: *геометрия есть наука, изучающая те свойства геометрических фигур, которые не меняются при движении фигуры*. На этом определении мы пока и остановимся; оно допускает ещё значительное развитие, но об этом речь будет итти в дальнейшем.

Придирчивый критик может не удовлетвориться и последним определением геометрии и потребовать ещё, чтобы ему определили, что такое движение. На это можно ответить следующим образом: *движением называется геометрическое преобразование плоскости (или пространства), переводящее каждую точку A в новую точку A', такое, что расстояние между каждыми двумя точками A и B равно расстоянию между точками A' и B', в которые они переходят*[1]). Однако такое определение является довольно абстрактным; так как мы установили, что движения играют в геометрии основную роль, хотелось бы более наглядно представить себе эти преобразования и подробно изучить все их свойства. Та-



Черт. 3.

[1]) Расстояние между двумя точками A и B плоскости равно $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, где x_1, y_1, соответственно x_2, y_2 — координаты точек A и B в какой-либо (безразлично какой!) прямоугольной декартовой системе координат (черт. 3); таким образом, понятие расстояния сводится к простой алгебраической формуле и не нуждается в дальнейших разъяснениях. Аналогично этому расстояние между двумя точками A и B пространства равно $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — декартовы координаты точек A и B в пространстве.

кое изучение и составляет основное содержание части первой настоящей книги. В конце части дано полное перечисление всех возможных движений плоскости, которое можно также принять за новое, более простое их определение (подробнее об этом см. ниже, стр. 67—69).

Заметим ещё, что изучение движений не только весьма важно для уточнения понятия геометрии, но имеет и другое, практическое, значение. Основная роль движений в геометрии определяет их многочисленные приложения к решению геометрических задач, особенно задач на построение. При этом изучение движений даёт некоторые общие методы, применимые к решению многих геометрических задач, и позволяет иногда объединить ряд задач, которые при иных методах решения требуют каждая отдельного рассмотрения. Для примера укажем следующие три известные задачи на построение:

а) построить треугольник, если известны три точки плоскости, являющиеся вершинами равносторонних треугольников, построенных вне треугольника на его сторонах;

б) построить треугольник, если известны три точки плоскости, являющиеся центрами квадратов, построенных вне треугольника на его сторонах;

в) построить девятиугольник, если известны девять точек, являющихся серединами сторон девятиугольника.

Если подходить к этим задачам с обыкновенными «школьными» приёмами, то их следует рассматривать как совершенно разные и решать независимо одну от другой[1]). Изучение же движений позволяет дать простое решение следующей более общей задачи (см. задачу 19 на стр. 39):

построить n-угольник, если известны n точек, являющихся вершинами равнобедренных треугольников, построенных на сторонах этого n-угольника и имеющих при вершинах заданные углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. [Задача а) получается отсюда при $n=3$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=60^\circ$; задача б) — при $n=3$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=90^\circ$; задача в) — при $n=9$, $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_9=180^\circ$.]

Большое число других геометрических задач, которые решаются с помощью движений, читатель найдёт в гл. I и II первой части.

---

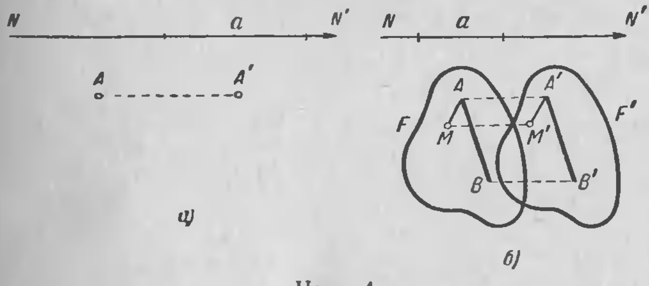
[1] См., например, книгу: Д. О. Шклярский и др., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1952, задачи 68 а), б); 79.

ГЛАВА I

СОБСТВЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ

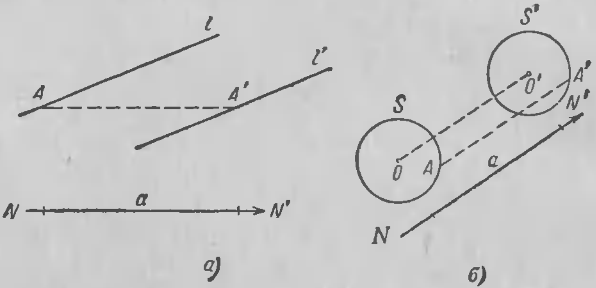
§ 1. Параллельный перенос

Выберем на плоскости какое-либо направление NN' (его можно задать, например, прямой со стрелкой); зададим также какой-нибудь отрезок длины a. Пусть A — произвольная точка плоскости, A' — такая точка, что отрезок AA' имеет направление NN' и длину a (черт. 4, a). В таком случае говорят, что точка A' *получается из точки* A *параллельным переносом* в направлении NN' на расстояние a или что точка A *переходит в точку* A'



Черт. 4.

при указанном параллельном переносе. Совокупность всех точек, в которые переходят точки некоторой фигуры F при параллельном переносе, образует новую фигуру F', про которую говорят, что она *получается параллельным переносом из фигуры* F (черт. 4, $б$). Иногда говорят также, что фигура F' получается, если сдвинуть фигуру F «как целое» в направлении NN' на расстояние a. Слова «как целое» здесь означают, что *все* точки фигуры F перемещаются в одном и том же направлении и на одно и то же расстояние, т. е. что все отрезки, соединяющие соответствующие друг другу точки фигур F и F', параллельны, одинаково направлены и равны по величине. Если фигура F' получается из F параллельным переносом в направлении NN', то фигуру F можно получить из F' параллельным переносом в направлении, обратном NN' (в направлении $N'N$); это позволяет говорить о парах фигур, получающихся одна из другой параллельным переносом.



Черт. 5.

Параллельный перенос переводит прямую l в параллельную ей прямую l' (черт. 5, *а*), а окружность S — в равную ей окружность S' (черт. 5, *б*).

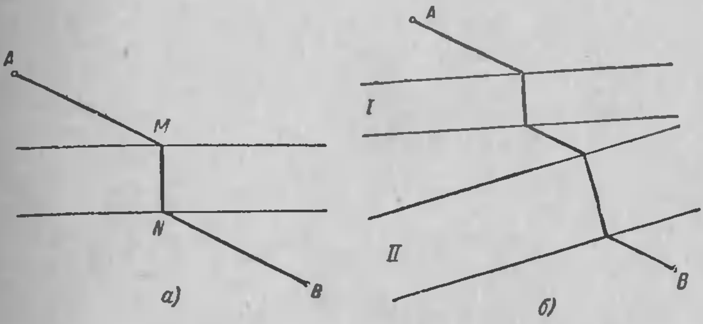
1. Даны две окружности S_1 и S_2 и прямая l. Проведите прямую, параллельную l, так, чтобы расстояние между точками пересечения этой прямой с окружностями S_1 и S_2 имело данную величину a.

2. а) В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую две данные деревни A и B (черт. 6, *а*), чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был кратчайшим (берега реки считаются параллельными прямыми, мост предполагается перпендикулярным к реке).

б) Решите ту же задачу, если деревни A и B разделяются несколькими реками, через которые надо построить мосты (черт. 6, *б*).

3. а) Найдите геометрическое место точек M, сумма расстояний которых до двух данных прямых l_1 и l_2 имеет известную величину a.

б) Найдите геометрическое место точек M, разность расстояний которых до двух данных прямых l_1 и l_2 имеет известную величину a.

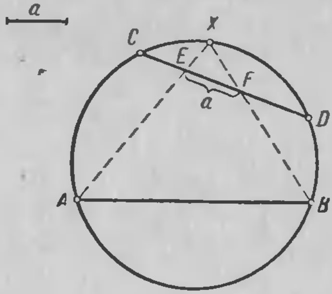


Черт. 6.

4. Докажите, что если у четырёхугольника $ABCD$ средняя линия MN (M есть середина стороны AD, N — середина стороны BC) равна полусумме оснований AB и CD, то четырёхугольник является трапецией.

5. Даны хорды AB и CD окружности. Найдите на ней такую точку X, чтобы хорды AX и BX высекали на CD отрезок EF, имеющий данную величину a (черт. 7).

В другой связи задача 5 приведена в § 5 гл. I третьей части книги (см. задачу 181 а)).



Черт. 7.

6. а) Даны две окружности S_1 и S_2, пересекающиеся в точках A и B. Проведите через точку A прямую l, отрезок которой, заключённый внутри окружностей S_1 и S_2, имеет данную длину a.

б) Постройте треугольник, который равен данному и стороны которого проходят через три заданные точки.

В другой связи задача 6 б) приведена в § 1 гл. II второй части (см. задачу 73 а) на стр. 120).

7. Даны две окружности S_1 и S_2. Проведите прямую l:

а) параллельную данной прямой l_1 и такую, что S_1 и S_2 высекают на l равные хорды;

б) параллельную данной прямой l_1 и такую, что S_1 и S_2 высекают на l хорды, сумма (или разность) которых равна данному отрезку a;

в) проходящую через данную точку A и такую, что S_1 и S_2 высекают на l равные хорды.

Параллельный перенос является примером преобразования плоскости, переводящего каждую точку A в некоторую другую точку A' [1]. Очевидно, что при этом преобразовании ни одна точка плоскости не остаётся на месте; другими словами, параллельный перенос не имеет неподвижных точек.

Однако существуют прямые, которые при параллельном переносе остаются на месте; так, все прямые, параллельные направлению переноса, переходят сами в себя («скользят сами по себе»), и следовательно, эти прямые (и только они) являются неподвижными прямыми параллельного переноса.

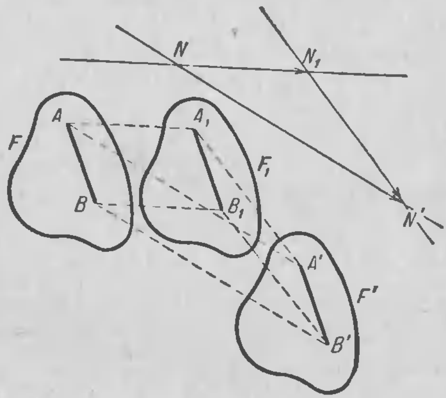
Рассмотрим теперь дальнейшие свойства параллельного переноса. Пусть F и F' — две фигуры, получающиеся одна из другой параллельным переносом; A и B — произвольные точки фигуры F, A' и B' — соответствующие им точки фигуры F' (см. черт. 4, б на стр. 19). Так как $AA' \parallel BB'$ и $AA' = BB'$, то четырёхугольник $AA'B'B$ — параллелограмм; следовательно, $AB \parallel A'B'$ и $AB = A'B'$. Таким образом, *если фигуры F и F' получаются одна из другой параллельным переносом, то соответствующие друг другу отрезки этих фигур равны, параллельны и одинаково направлены.*

Покажем, что и обратно, *если с каждой точкой фигуры F можно сопоставить некоторую точку другой фигуры F'*

---

[1] Это преобразование является движением в смысле определения, данного во введении к этой части, так как оно, как доказано в этом параграфе, переводит каждый отрезок AB в равный ему отрезок $A'B'$.

так, что отрезки, соединяющие соответствующие друг другу точки этих фигур, равны, параллельны и одинаково направлены, то фигуры F и F' получаются одна из другой параллельным переносом. Действительно, выберем какую-то пару соответствующих друг другу точек M и M' фигур F и F', и пусть A и A' — какие-то другие соответствующие точки этих фигур (см. черт. 4, *б*). По условию $MA \parallel M'A'$ и $MA = M'A'$; следовательно, четырёхугольник $MM'A'A$ — параллелограмм и, значит, $AA' \parallel MM'$ и $AA' = MM'$, т. е. точка A' получается из A параллельным переносом в направлении прямой MM' на расстояние MM'. Но так как A и A' — произвольная пара соответствующих точек, то это означает, что вся фигура F' получается из F параллельным переносом в направлении MM' на расстояние MM'.

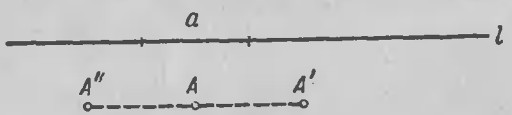


Черт. 8.

Выясним теперь, что получится, если произвести один за другим два параллельных переноса. Пусть первый параллельный перенос переводит фигуру F в фигуру F_1, а второй — фигуру F_1 в фигуру F' (черт. 8). Докажем, что существует параллельный перенос, переводящий фигуру F в фигуру F'. Действительно, если первый параллельный перенос переводит какой-либо отрезок AB фигуры F в отрезок A_1B_1 фигуры F_1, то $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = AB$ и отрезки A_1B_1 и AB одинаково направлены; точно так же второй параллельный перенос переводит A_1B_1 в отрезок $A'B'$ такой, что $A'B' \parallel A_1B_1$, $A'B' = A_1B_1$ и отрезки $A'B'$ и A_1B_1 одинаково направлены. Отсюда видно, что соответствующие друг другу отрезки AB и $A'B'$ фигур F и F' равны, параллельны и одинаково направлены. Но это и означает, что существует параллельный перенос, переводящий F в F'. Итак, *любую последовательность двух параллельных переносов можно заменить одним параллельным переносом.*

Последнее утверждение можно сформулировать ещё иначе. В механике замена нескольких перемещений одним, им равносильным, обычно называется сложением перемещений; в этом же смысле мы будем говорить и о сложении преобразований, называя суммой двух преобразований плоскости преобразование, которое получится, если произвести сначала первое из них, а затем второе [1]). Тогда полученный выше результат можно сформулировать так: *сумма двух параллельных переносов есть новый параллельный перенос* [2]). Отметим ещё, что если NN_1 есть отрезок, указывающий величину и направление первого параллельного переноса (переводящего F в F_1), а N_1N' — отрезок, указывающий величину и направление второго параллельного переноса (переводящего F_1 в F'), то отрезок NN' указывает величину и направление параллельного переноса, переводящего F в F'.

Часто говорят о параллельном переносе на данное расстояние a в направлении известной прямой l. Однако это выражение не является точным, так как при заданной точке A условия: 1° $AA' \parallel l$; 2° $AA' = a$ определяют две точки A' и A'' (черт. 9), а не одну.



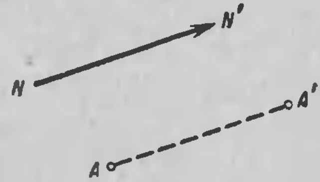
Черт. 9.

Для того чтобы уточнить это выражение, поступают следующим образом. Одно из направлений прямой l выбирают за положительное (его можно указать стрелкой), и величину a считают положительной или отрицательной в зависимости от того, совпадает ли направление переноса с положительным направлением прямой l или противоположно ему. При этом двум точкам A' и A'' черт. 9 отвечают уже различные (по знаку) величины переноса. Таким образом, естественно возникает понятие о направленных отрезках прямой, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. [Понятие направленных отрезков прямой оказывается полезным и в ряде других

[1]) В литературе в этом же смысле употребляется также термин «произведение преобразований».

[2]) Вот ещё одна формулировка того же предложения: *две фигуры F и F', которые порознь можно получить параллельным переносом из одной и той же третьей фигуры F_1, можно также получить параллельным переносом одну из другой.*

вопросов элементарной геометрии; см., например, ниже, стр. 77 или книгу — Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз 1948, стр. 178 и след. Понятие направленной прямой т. е. прямой l, на которой выбрано определённое направление, указанное стрелкой, возникает также не только в связи с параллельным переносом; см. по этому поводу § 5 гл. II третьей части книги.]

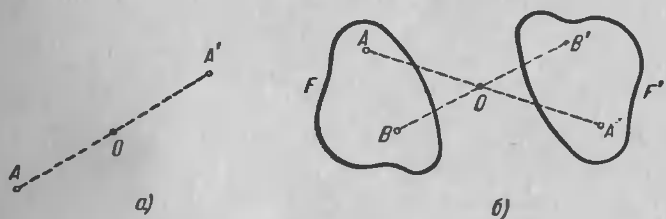


Черт. 10.

Можно также характеризовать параллельный перенос одним направленным отрезком NN' плоскости, указывающим сразу и направление и величину переноса (черт. 10). При этом мы приходим к понятию направленных отрезков плоскости (векторов), которое из других соображений возникает в механике и физике. Отметим, что понятие о сложении параллельных переносов приводит к обычному определению сложения векторов (см. выше черт. 8).

§ 2. Симметрия относительно точки и вращение

Точка A' называется симметричной точке A относительно точки O (называемой центром симметрии), если отрезок AA' проходит через точку O и делится ею пополам (черт. 11, *а*). Очевидно, что если точка A' симметрична точке A относительно точки O, то и, обратно, A

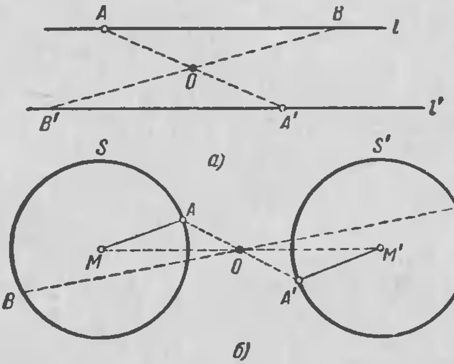


Черт. 11.

симметрична A' относительно O; это позволяет говорить о точках, симметричных друг другу относительно данной точки. Если A' симметрична A относительно O, то говорят также, что A' получается из A отражением от точки O.

Совокупность всех точек, симметричных точкам некоторой фигуры F относительно точки O, образует фигуру F', симметричную фигуре F относительно O (черт. 11, *б*);

при этом и, обратно, фигура F будет симметрична F' относительно той же точки O. Прямая при симметрии относительно точки переходит в параллельную ей прямую (черт. 12, *а*), а окружность — в равную ей окружность (черт. 12, *б*). [Для того чтобы доказать, например, что окружность при симметрии переходит в окружность, достаточно заметить, что



Черт. 12.

треугольники AOM и $A'OM'$ на черт. 12, *б* равны; следовательно, геометрическое место точек A, удалённых от M на расстояние r, переходит в геометрическое место точек A', удалённых от M' на расстояние r.]

8. Через данную точку A проведите прямую так, чтобы отрезок, заключённый между точками пересечения её с данной прямой l и с данной окружностью S [1]) делился в точке A пополам.

9. Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую l так, чтобы

а) окружности S_1 и S_2 высекали на l равные хорды;

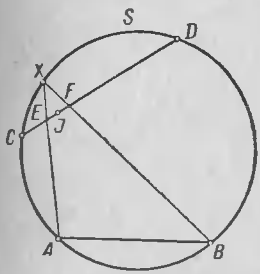
б) разность хорд, высекаемых на l окружностями S_1 и S_2, имела заданную длину a.

Задача 9 б), очевидно, является обобщением задачи 6 а).

[1]) Здесь имеется в виду какая-нибудь одна из точек пересечения прямой l с окружностью S.

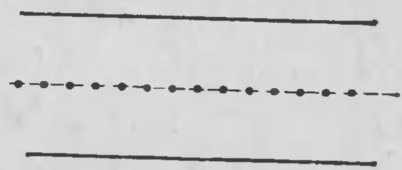
10. Даны хорды AB и CD окружности S и точка J на хорде CD. Найдите на окружности такую точку X, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, делящийся в точке J пополам (черт. 13).

В другой связи задача 10 будет приведена во втором томе книги (см. задачу 181 б) из § 5 гл. I третьей части).



Черт. 13.

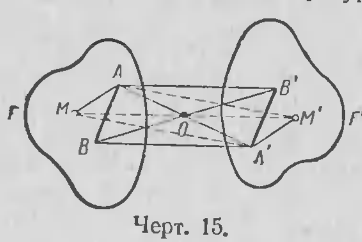
11. Полоса, образованная двумя параллельными прямыми, имеет, очевидно, бесконечно много центров симметрии (черт. 14). Может



Черт. 14.

ли фигура иметь больше одного, но конечное число центров симметрии (например, 2 и только 2 центра)?

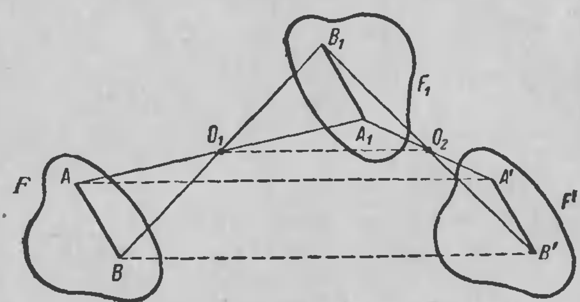
Если F и F' — две фигуры, симметричные относительно точки O, AB и $A'B'$ — соответствующие отрезки этих фигур (черт. 15), то четырёхугольник $ABA'B'$ является параллелограммом (так как его диагонали в точке пересечения O делятся пополам). Отсюда видно, что *соответствующие отрезки двух фигур, симметричных относительно точки, равны, параллельны и противоположно направлены*.



Черт. 15.

Покажем, что и обратно, *если с каждой точкой фигуры F можно сопоставить некоторую точку другой фигуры F' так, что соответствующие отрезки этих фигур будут равны, параллельны и противоположно направлены, то фигуры F и F' симметричны относительно некоторой точки*. Действительно, выберем какую-то пару соответствующих друг другу точек M и M' фигур F и F', и пусть O — середина отрезка MM', A, A' — любые другие соответствующие точки этих фигур (см. черт. 15). По условию $AM \parallel M'A'$ и $AM = M'A'$; следовательно, четырёхугольник $AMA'M'$ является параллелограммом и, значит, середина его диагонали AA' совпадает с серединой O диагонали MM', т. е. точка A' получается из A симметрией относительно точки O. А так как A и A' — произвольная пара соответствующих точек, то это означает, что фигура F' симметрична F относительно O.

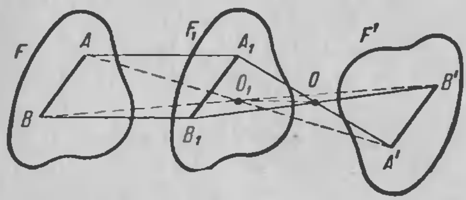
Рассмотрим теперь три фигуры F, F_1 и F' такие, что фигура F_1 симметрична F относительно точки O_1, а фигура F' симметрична F_1 относительно точки O_2 (черт. 16). Пусть



Черт. 16.

A_1B_1 — произвольный отрезок фигуры F_1, AB и $A'B'$ — соответствующие ему отрезки фигур F и F'. В таком случае отрезки A_1B_1 и AB равны, параллельны и противоположно направлены; отрезки A_1B_1 и $A'B'$ тоже равны, параллельны и противоположно направлены. Следовательно, отрезки AB и $A'B'$ будут равны, параллельны и одинаково направлены. Но раз соответствующие отрезки фигур F и F' равны, параллельны и одинаково направлены, то *F' можно получить из F параллельным переносом*. Таким образом, *сумма двух симметрий относительно точки представляет собой параллельный перенос* (ср. выше, стр. 24). Это можно также и непосредственно усмотреть из черт. 16: так как O_1O_2 есть средняя линия треугольника AA_1A', то $AA' \parallel O_1O_2$ и $AA' = 2O_1O_2$, т. е. каждая точка A' фигуры F' получается из соответствующей точки A фигуры F параллельным переносом *в направлении O_1O_2 на расстояние, равное удвоенному отрезку O_1O_2*.

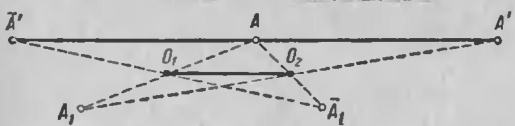
Точно так же доказывается, что *сумма параллельного переноса и симметрии относительно точки* O (черт. 17) *или симметрии относительно точки и параллельного переноса*



Черт. 17.

представляет собой симметрию относительно некоторой новой точки O_1.

Отметим ещё одно важное обстоятельство. Последовательность симметрий относительно точек O_1 и O_2 (на черт. 18: $A \longrightarrow A_1 \longrightarrow A'$) равносильна параллельному переносу на расстояние $2O_1O_2$ в направлении от O_1 к O_2, а последовательность этих же симметрий, произведённых в обратном порядке (на черт. 18: $A \longrightarrow \overline{A}_1 \longrightarrow \overline{A'}$), равносильна параллельному переносу на то же расстояние в обратном



Черт. 18.

направлении от O_2 к O_1 (черт. 18). Таким образом, сумма двух симметрий относительно точки существенно зависит от порядка, в котором производятся эти симметрии. Это обстоятельство вообще характерно для сложения преобразований: сумма двух преобразований, как правило, зависит от порядка слагаемых.

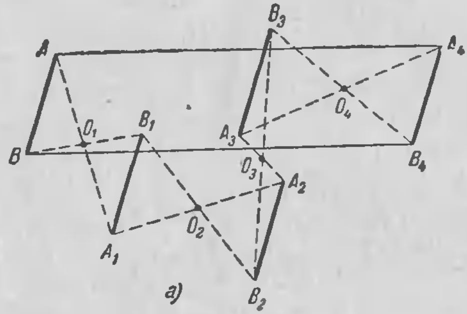
Говоря о сложении симметрий относительно точек, мы рассматривали симметрию как преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в новую точку A' [1]. Нетрудно видеть, что единственной неподвижной точкой этого преобразования является центр симметрии O, а неподвижными прямыми — все прямые, проходящие через центр O.

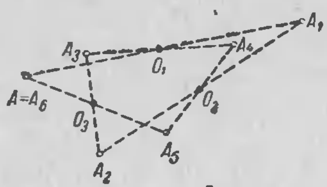
[1]) См. сноску на стр. 22.

12. а) Пусть O_1, O_2, ..., O_n (n чётно) — точки плоскости и AB — произвольный отрезок; отрезок A_1B_1 симметричен AB относительно O_1, A_2B_2 симметричен A_1B_1 относительно O_2, A_3B_3 симметричен A_2B_2 относительно O_3, ..., наконец, A_nB_n симметричен $A_{n-1}B_{n-1}$ относительно O_n (см. черт. 19, *а*, где $n=4$). Докажите, что $AA_n = BB_n$.

Останется ли верно утверждение задачи, если n нечётно?

б) На плоскости дано нечётное число точек O_1, O_2, ..., O_n (см. черт. 19, *б*, где $n=3$). Произвольная





Черт. 19.

точка A отражается последовательно от точек O_1, O_2, ..., O_n и затем ещё раз отражается последовательно от тех же точек O_1, O_2, ..., O_n. Докажите, что точка A_{2n}, полученная в результате всех $2n$ отражений, совпадает с точкой A.

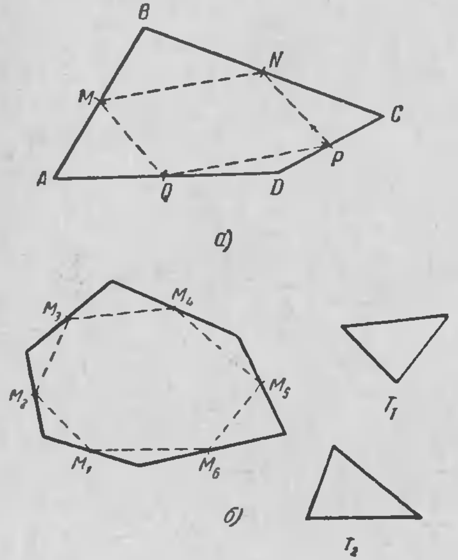
Останется ли верно утверждение задачи, если n чётно?

13. На плоскости даны n точек (где n нечётно, например $n=9$) — середины сторон n-угольника. Постройте его вершины.

Рассмотрите случай чётного n.

Обобщением задачи 13 являются задача 19 (стр. 39) и задача 66 из § 2 гл. I второй части (стр. 107).

14. а) Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника $ABCD$ образуют параллелограмм (черт. 20, a).

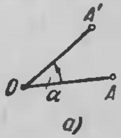


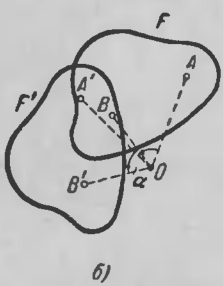
Черт. 20.

б) Пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 — середины сторон произвольного шестиугольника. Докажите, что существует треугольник T_1, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6, и треугольник T_2, стороны которого равны и параллельны M_2M_3, M_4M_5, M_6M_1 (черт. 20, $б$).

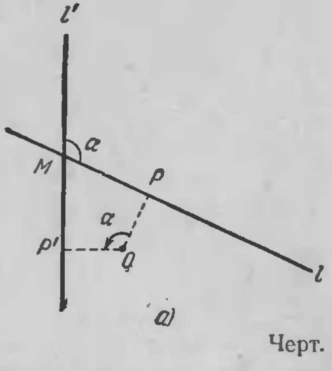
Выберем на плоскости некоторую точку O; зададимся также каким-то углом α и условимся о направлении вращения (будем считать, например, что оно противоположно направлению хода часовой стрелки). Пусть A — произвольная точка плоскости, A' — такая точка, что $OA' = OA$ и $\angle AOA' = \alpha$

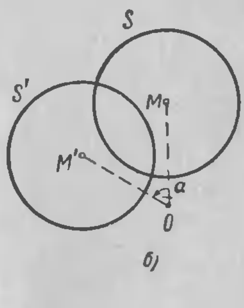
(причём OA надо повернуть для совмещения с OA' на угол α в выбранном нами направлении). В таком случае говорят, что точка A' получается из точки A **вращением с центром** O **и углом поворота** α или что точка A переходит в A' при указанном вращении (черт. 21, *а*). Совокупность всех точек, в которые переходят точки фигуры F при некотором вращении, образует фигуру F', **получающуюся вращением** из фигуры F (черт. 21, *б*). Иногда говорят также, что фигура F' получается, если повернуть фигуру F «как целое» вокруг точки O на угол α; здесь слова «как целое» имеют тот смысл, что **все** точки F перемещаются по окружностям с одним и тем же центром O и описывают одинаковые (по угловой мере) дуги этих окружностей. Если фигура F' получается вращением из фигуры F, то и обратно, фигуру F можно получить из фигуры F' вращением с тем же самым центром и углом поворота $360° - \alpha$ (или вращением на тот же самый угол α, но в противоположном направлении); это позволяет говорить о парах фигур, получающихся вращением друг из друга.





Черт. 21.



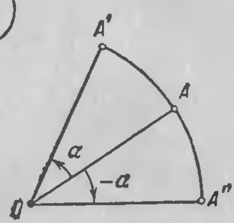


Черт. 22.

Прямая l переходит при вращении в новую прямую l'; для того чтобы найти l', достаточно повернуть основание P перпендикуляра, опущенного из центра вращения O на прямую l, и через полученную точку P' провести прямую, перпендикулярную к OP' (черт. 22, *а*). Очевидно, что угол α между прямыми l и l' равен углу поворота; для доказательства достаточно заметить, что углы POP' и lMl' на черт. 22, *а* равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Окружность S переходит при вращении в новую окружность S'; для того чтобы построить S', надо повернуть центр M окружности S и построить окружность с центром в полученной точке M' и тем же радиусом, что и окружность S (черт. 22,*б*).

Очевидно, при заданной точке A условия: 1° $OA' = OA$, 2° $\angle AOA' = \alpha$ без дополнительных оговорок о направлении вращения определяют д в е точки A' и A'' (черт. 23). Для того чтобы выделить одну из них, можно поступить, например, так. Условимся считать какое-либо определённое направление вращения положительным (его можно задать, например, стрелкой, поставленной на какой-либо окружности), а противоположное направление — отрицательным. Далее будем считать угол поворота $\alpha = \angle AOA'$ положительным или отрицательным в зависимости от того, каково направление вращения, переводящего A в A'; в таком случае две точки A' и A'' будут отвечать р а з л и ч н ы м углам поворота (отличающимся знаком). Таким образом, мы естественно приходим к понятию о н а п р а в л е н н ы х у г л а х, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. [Это понятие оказывается полезным и в ряде других вопросов элементарной геометрии; см. по этому поводу написанные Д. И. Перепёлкиным решения задач в цитированной на стр. 25 книге Ж. Адамара, стр. 488 и след. Понятие н а п р а в л е н н о й о к р у ж н о с т и, т. е. окружности, на которой выбрано какое-либо направление, указанное стрелкой, также возникает не только в связи с вращением; см. по этому поводу § 5 гл. II третьей части книги.]



Черт. 23.

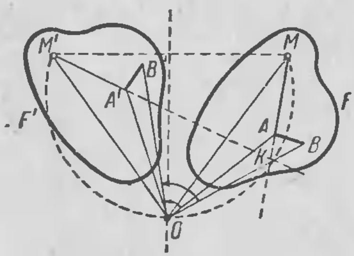
15. Даны две прямые l_1 и l_2, точка A и угол α. Проведите окружность с центром A, на которой l_1 и l_2 высекают дугу, равную по угловой мере α. 21 1

16. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трёх данных параллельных прямых или трёх данных концентрических окружностях. 21 9

17. Даны окружность S, точки A и B и угол α. Найдите на S точки C и D такие, что $CA \parallel DB$ и дуга $CD = \alpha$. 21 g

18. Даны две окружности S_1 и S_2, точка A и угол α. Проведите через A прямые l_1 и l_2, образующие угол α, так, чтобы окружности S_1 и S_2 высекали на этих прямых равные хорды.

Пусть вращение с центром в точке O и углом поворота α переводит фигуру F в фигуру F', и пусть AB и $A'B'$ — соответствующие отрезки этих фигур (черт. 24). Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ равны (ибо $OA = OA'$, $OB = OB'$ и $\angle AOB = \angle A'OB'$, так как $\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha$); следовательно, $AB = A'B'$. Угол между отрезками AB и $A'B'$ равен α (ибо прямые AB и $A'B'$ получаются одна из другой вращением на угол α; см. выше, черт. 22, *а*); при этом AB надо повернуть на угол α в направлении вращения, чтобы получить направление отрезка $A'B'$ [1]). Итак, мы видим, что *если фигуры F и F' получаются одна из другой вращением на угол α, то соответствующие отрезки этих фигур равны и образуют между собой угол α.*



Черт. 24.

Покажем, что и обратно, *если с каждой точкой фигуры F можно сопоставить точку другой фигуры F' так, что соответствующие отрезки этих фигур равны и образуют между собой угол α* (причём отрезки фигуры F становятся параллельными соответствующим им отрезкам фигуры F' при повороте на угол α в определённом направлении), *то F и F' получаются одна из другой вращением вокруг*

$\alpha\neq 0$

[1]) Углом между двумя отрезками AB и $A'B'$, не выходящими из одной точки, по определению, называется угол между прямыми AB и $A'B'$. Это есть тот угол, на который надо повернуть отрезок AB, чтобы он стал параллелен отрезку $A'B'$.

Из последнего замечания вытекает, что *если имеются три отрезка AB, A_1B_1 и $A'B'$, то угол между первым и третьим равен сумме углов между первым и вторым и между вторым и третьим* (для полной точности здесь следовало бы говорить о направленных углах; см. мелкий шрифт на предыдущей странице). Этим обстоятельством мы вскоре воспользуемся.

некоторого центра на угол α. Действительно, пусть M и M' — две соответствующие друг другу точки фигур F и F'. Построим на отрезке MM' дугу окружности, вмещающую угол α, и пусть O — точка пересечения этой дуги с перпендикуляром, восставленным к отрезку MM' в его середине. Так как $OM=OM'$ и $\angle MOM'=\alpha$, то вращение с центром O и углом поворота α переводит точку M в M' [1]). Пусть, далее, A и A' — какие угодно другие соответствующие точки фигур F и F'. Рассмотрим треугольники OMA и $OM'A'$. У них $OM=OM'$ (по построению точки O), $MA=M'A'$ (по условию); кроме того, $\angle OMA=OM'A'$, ибо угол между OM и OM' равен углу между MA и $M'A'$, т. е. точки M, M', O и K (K — точка пересечения AM и $A'M'$) лежат на одной окружности и вписанные углы OMA и $OM'A'$ опираются на одну и ту же дугу. Поэтому треугольники OMA и $OM'A'$ равны. Отсюда следует, что $OA=OA'$; кроме того, $\angle AOA'=\angle MOM'=\alpha$ (ибо $\angle A'OM'=\angle AOM$). Следовательно, вращение с центром O и углом поворота α переводит к а ж д у ю точку A фигуры F в соответствующую точку A' фигуры F', что и требовалось доказать.

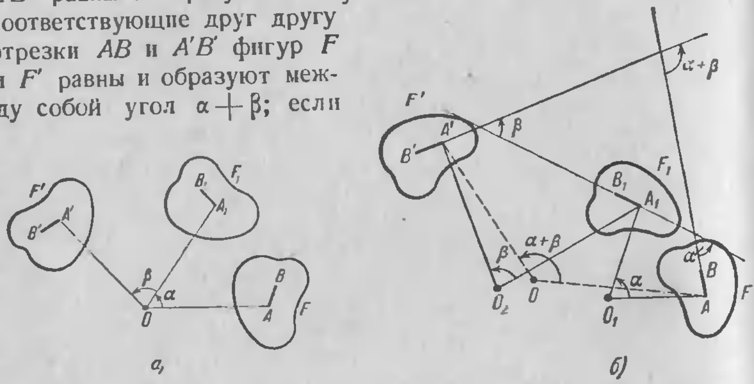
Теперь мы в состоянии ответить на вопрос о том, что представляет собой с у м м а двух вращений. Прежде всего из самого определения вращения ясно, что сумма двух вращений (в одном направлении) с о б щ и м ц е н т р о м O и углами поворота соответственно α и β представляет собой вращение с тем же центром O и углом поворота $\alpha+\beta$ (черт. 25, *а*).

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть фигура F_1 получается из F вращением с центром O_1 и углом поворота α, а фигура F' получается из F_1 вращением в том же направлении с центром O_2 и углом поворота β (черт. 25, *б*). Если первое вращение переводит какой-то отрезок AB фигуры F в отрезок A_1B_1 фигуры F_1, а второе вращение переводит отрезок A_1B_1 в отрезок $A'B'$ фигуры F', то отрезки AB и

---

[1]) Условия $OM=OM'$ и $\angle MOM'=\alpha$ определяют д в е точки O (сегмент можно построить по одну и по другую сторону от MM'). Из них следует выбрать одну так, чтобы направление вращения с центром O, переводящего M в M', совпало с направлением вращения на угол α, которое делает отрезки фигуры F параллельными соответствующим отрезкам фигуры F'.

A_1B_1 равны и образуют между собой угол α; отрезки A_1B_1 и $A'B'$ равны и образуют между собой угол β. Таким образом, соответствующие друг другу отрезки AB и $A'B'$ фигур F и F' равны и образуют между собой угол $\alpha+\beta$; если



Черт. 25.

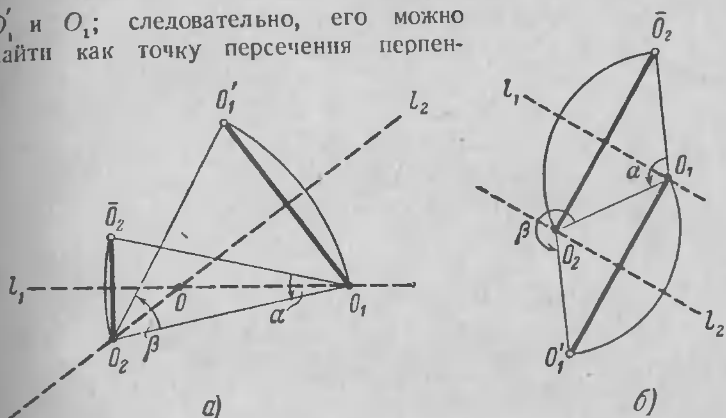
$\alpha+\beta=360°$, то это означает, что соответствующие отрезки фигур F и F' параллельны [1]). Отсюда следует в силу доказанного выше, что фигуры F и F' получаются одна из другой вращением на угол $\alpha+\beta$, если $\alpha+\beta\neq 360°$, и параллельным переносом, если $\alpha+\beta=360°$. Итак, *сумма двух вращений в одном направлении с центрами O_1 и O_2 и углами поворота α и β есть вращение на угол $\alpha+\beta$, если $\alpha+\beta\neq 360°$, и параллельный перенос, если $\alpha+\beta=360°$.* Так как вращение на угол α равносильно вращению на угол $360°-\alpha$ в противоположном направлении, то последнюю часть доказанного предложения можно сформулировать ещё и так: *сумма двух вращений представляет собой параллельный перенос, если эти вращения имеют одинаковые углы поворота, но противоположные направления вращения.*

Покажем теперь, как по центрам O_1 и O_2 двух вращений и их углам поворота α и β найти вращение или параллельный перенос, представляющие собой их сумму. Пусть сначала $\alpha+\beta\neq 360°$. В таком случае сумма вращений есть вращение на угол $\alpha+\beta$;

---

[1]) Собственно, следовало бы сказать, что соответствующие отрезки фигур F и F' параллельны, если $\alpha+\beta$ кратно $360°$. Однако всегда можно считать, что углы α и β меньше $360°$; в таком случае $\alpha+\beta$ кратно $360°$ лишь в случае $\alpha+\beta=360°$.

определим его центр. Сумма вращений переводит точку O_1 в такую точку O_1', что $O_1'O_2 = O_1O_2$ и $\angle O_1O_2O_1' = \beta$ (черт. 26,*а*; первое вращение оставляет O_1 на месте, а второе — переводит O_1 в O_1'); она же переводит в точку O_2 такую точку $\bar{O}_2$, что $\bar{O}_2O_1 = O_2O_1$ и $\angle \bar{O}_2O_1O_2 = \alpha$ (первое вращение переводит $\bar{O}_2$ в O_2, а второе оставляет O_2 на месте). Отсюда следует, что искомый центр вращения O равноудалён от O_2 и $\bar{O}_2$ и от O_1' и O_1; следовательно, его можно найти как точку пересечения перпендикуляров l_1 и l_2, восставленных к отрезкам $O_2\bar{O}_2$ и $O_1'O_1$ в их серединах. Но из черт. 26, *а* видно, что l_1 проходит через O_1 и $\angle l_1O_1O_2 = \frac{\alpha}{2}$, а l_2 проходит через O_2 и $\angle O_1O_2l_2 = \frac{\beta}{2}$.

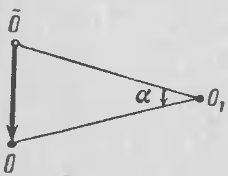


Черт. 26.

Этими условиями прямые l_1 и l_2 полностью определяются; построив их, мы найдём O как точку их пересечения. Если $\alpha + \beta = 360°$, то параллельный перенос, которому равна сумма вращений, можно определить тем, что он переводит точку O_1 в O_1' (или $\bar{O}_2$ в O_2); здесь точки O_1' и $\bar{O}_2$ определяются так же, как и выше (см. черт. 26, *б*; из этого чертежа видно, что фигурирующие в предыдущем построении прямые l_1 и l_2 здесь параллельны — они перпендикулярны к направлению переноса, а расстояние между ними вдвое меньше величины переноса).

Аналогично доказательству теоремы о сумме двух вращений можно показать, что *сумма параллельного переноса и вращения и сумма вращения и параллельного переноса есть вращение* *с тем же самым углом поворота α, что и у первоначального вращения, но с иным центром.* Предоставляем читателю самому найти построение центра O_1 этого вращения по центру O и углу поворота α первоначального вращения и величине и направлению параллельного переноса (см. также текст, напечатанный мелким шрифтом непосредственно за этим и на стр. 52).

Теорему о сложении параллельного переноса и вращения можно также доказать следующим образом. Мы знаем, что сумма двух вращений с одинаковыми углами поворота α, но разными направлениями вращения есть параллельный перенос; он переводит в центр O_2 второго вращения такую точку $\bar{O}_2$, что $O_1\bar{O}_2 = O_1O_2$ и $\angle \bar{O}_2O_1O_2 = \alpha$ (см. черт. 26, *б*). Представим заданный параллельный перенос в виде суммы двух вращений, второе из которых имеет тот же центр O и тот же угол поворота α, что и заданное вращение, но противоположное направление вращения. [Центр O_1 первого вращения определится условиями $O_1\bar{O} = O_1O$ и $\angle \bar{O}O_1O = \alpha$, где $\bar{O}$ — точка, которую заданный параллельный перенос переводит в точку O; см. черт. 27.] При этом сумма параллельного переноса и вращения заменится суммой трёх вращений. Но последние два из этих вращений взаимно уничтожатся, и у нас останется одно-единственное вращение с центром O_1.



Черт. 27.

Аналогично можно доказать и теорему о сложении вращения и параллельного переноса.

Бросается в глаза значительное сходство между свойствами вращения и свойствами параллельного переноса; достаточно сравнить доказательства теорем о сложении параллельных переносов и о сложении вращений[1]). Параллельные переносы и вращения вместе называются с о б с т в е н н ы м и д в и ж е н и я м и; причины, оправдывающие это название, будут выяснены в § 2 гл. II (см. стр. 64).

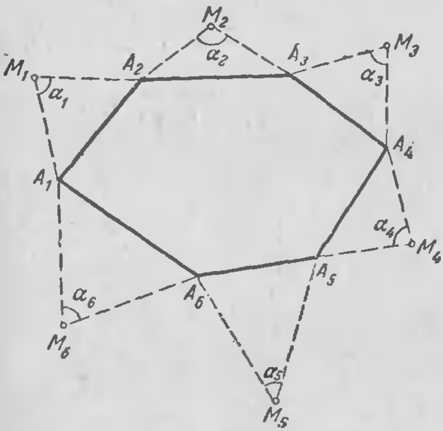
Симметрия относительно точки является частным случаем вращения, соответствующим углу поворота $\alpha = 180°$. Другой частный случай мы получим, положив $\alpha = 360°$. Вращение с углом поворота $360°$ возвращает каждую точку плоскости на её прежнее место; такое преобразование, при котором ни одна точка плоскости не меняет своего положения, называется т о ж д е с т в е н н ы м п р е о б р а з о в а н и е м. [Может показаться,

[1]) С некоторой точки зрения параллельный перенос можно даже считать частным случаем вращения; по этому поводу см. § 2 гл. I третьей части книги.

что само слово «преобразование» здесь является неуместным, поскольку при тождественном преобразовании все фигуры остаются без изменения; однако нам будет удобно это название.]

Как и симметрию относительно точки, вращение можно рассматривать как преобразование всей плоскости, переводящее каждую её точку A в новую точку A'[1]). Единственная неподвижная точка этого преобразования есть центр вращения O (исключение составляет лишь случай, когда угол поворота α кратен 360°, т. е. вращение является тождественным преобразованием); неподвижных прямых вращение не имеет вовсе (исключение составляет лишь случай, когда угол α кратен 180°, т. е. вращение является тождественным преобразованием или симметрией относительно точки).

19. Постройте n-угольник, если известны n точек, являющихся вершинами равнобедренных треугольников, построен-



Черт. 28.

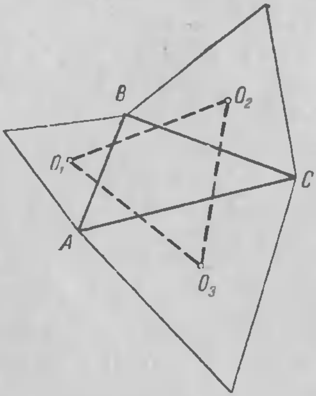
ных на сторонах этого n-угольника и имеющих при вершинах заданные углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (см. черт. 28, где $n = 6$).

Частным случаем задачи 19 является задача 13 (здесь $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$ $\ldots = \alpha_n = 180°$, n — нечётно). Обобщением задачи 19 является задача 66 из гл. II (стр. 107).

---

[1]) См. сноску на стр. 22.

20. а) На сторонах произвольного треугольника ABC, вне его, построены правильные треугольники. Докажите, что центры O_1, O_2, O_3 этих треугольников сами являются вершинами правильного треугольника (черт. 29).



Черт. 29.

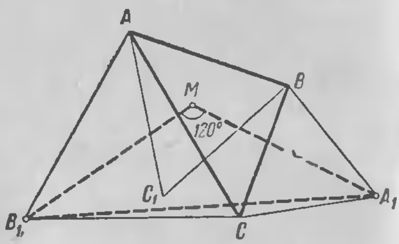
Сохранится ли в силе утверждение задачи, если правильные треугольники построены не вне ABC, а по ту же сторону от его сторон, по которую расположен сам треугольник?

б) На сторонах произвольного треугольника ABC, вне его, построены равнобедренные треугольники BCA_1, ACB_1, ABC_1 с углами при вершинах A_1, B_1 и C_1, соответственно равными α, β и γ. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, то углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, т. е. не зависят от формы треугольника ABC.

Сохранится ли в силе утверждение задачи, если равнобедренные треугольники построены не вне треугольника ABC, а по ту же сторону от его сторон, по какую расположен и сам треугольник?

Нетрудно видеть, что задача 20 а) является частным случаем задачи 20 б) (здесь $\alpha = \beta = \gamma = 120°$).

21. На сторонах произвольного треугольника ABC построены правильные треугольники BCA_1, ACB_1 и ABC_1, так что вершины A_1 и A, B_1 и B расположены по разные стороны от BC, соответственно от AC, а C_1 и C — по одну сторону от AB. Пусть M есть центр треугольника ABC_1. Докажите, что A_1B_1M есть равнобедренный треугольник с углом при вершине M, равным 120° (черт. 30).

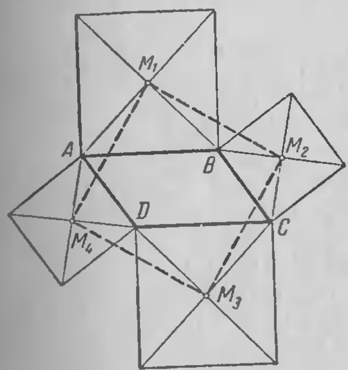


Черт. 30.

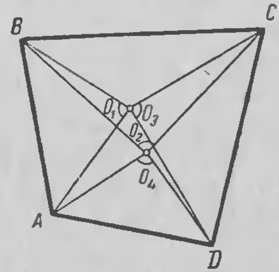
22. На сторонах произвольного параллелограмма $ABCD$, вне его, построены квадраты. Докажите, что их центры M_1, M_2, M_3, M_4 сами являются вершинами квадрата (черт. 31).

Сохранится ли в силе утверждение задачи, если квадраты расположены по ту же сторону от сторон параллелограмма, по какую расположен сам параллелограмм?

23. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что если вершины O_1 и O_3 равнобедренных прямоугольных треугольников ABO_1 и CDO_3 совпадают между собой, то совпадают также и вершины O_2 и O_4 равнобедренных прямоугольных треугольников BCO_2 и DAO_4 (черт. 32; все треугольники строятся внутри четырёхугольника).



Черт. 31.



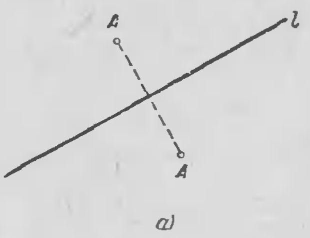
Черт. 32.

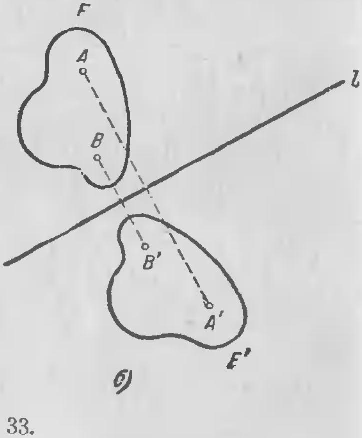
ГЛАВА II

СИММЕТРИИ

§ 1. Симметрия относительно прямой и скользящая симметрия

Точка A' называется симметричной точке A относительно прямой l (называемой осью симметрии), если отрезок AA' перпендикуляреи к прямой l и делится ею пополам (черт. 33, *а*). Если точка A' симметрична A относительно прямой l, то и, обратно, A симметрична A' относительно той же прямой; это позволяет говорить о точках, симметричных друг другу относительно данной прямой.

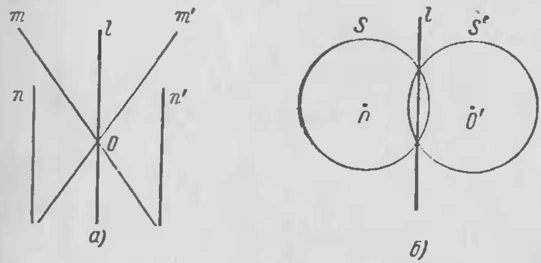




Черт. 33.

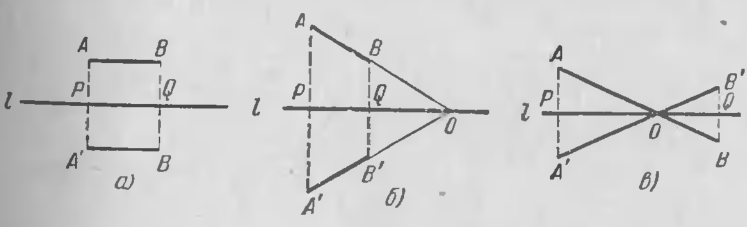
Если A' симметрична A относительно прямой l, то говорят также, что A' получается из A отражением от прямой l.

Совокупность всех точек, симметричных точкам некоторой фигуры F относительно прямой l, образует фигуру F', симметричную фигуре F относительно l (черт. 33, *б*); очевидно, что и обратно, F симметрична F' относительно l. Прямая при симметрии относительно прямой l переходит в новую прямую; при этом прямая, параллельная l, переходит в прямую, параллельную l, а прямая, пересекающая l в точке O,— в прямую, пересекающую l в той же точке (на черт. 34, *а* n переходит в n', m — в m'). Окружность



Черт. 34.

при симметрии относительно прямой переходит в равную ей окружность (черт. 34, *б*). [Чтобы доказать, например, последнее утверждение, достаточно заметить, что всякий отрезок AB переходит при симметрии относительно прямой в отрезок $A'B'$ той же длины: так, на черт. 35, *а* $AB = PQ = A'B'$, а на



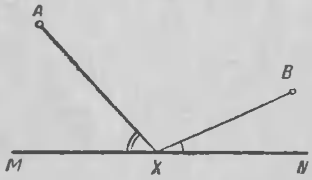
Черт. 35.

черт. 35, *б*, *в* $AB = A'B'$, так как $\triangle AOP = \triangle A'OP$, $\triangle BOQ = \triangle B'OQ$ и, следовательно, $OA = OA'$, $OB = OB'$. Отсюда следует, что геометрическое место точек, удалённых от некоторой точки O на расстояние r, переходит при симметрии относительно прямой в геометрическое место точек, удалённых на расстояние r от точки O', симметричной O

относительно прямой, т. е. что окружность S переходит в окружность S'.]

24. а) Даны прямая MN и две точки A и B по одну сторону от неё. Найдите на прямой MN точку X такую, чтобы отрезки AX и BX составляли с этой прямой равные углы.

б) Даны прямая MN и две окружности S_1 и S_2 по одну сторону от неё. Найдите на прямой MN точку X такую, чтобы касательные, проведённые из этой точки к окружностям, составляли с прямой MN равные углы.



Черт. 36.

в) Даны прямая MN и две точки A и B по одну сторону от неё. Найдите на прямой MN точку X такую, чтобы отрезки AX и BX составляли с этой прямой углы, один из которых вдвое больше другого (т. е. $\angle AXM = 2\angle BXN$, см. черт. 36).

25. а) Даны прямые l_1, l_2 и l_3, пересекающиеся в одной точке, и на одной из этих прямых точка A. Постройте треугольник ABC, для которого прямые l_1, l_2, l_3 являются биссектрисами.

б) Даны окружность S и прямые l_1, l_2 и l_3, проходящие через её центр. Опишите вокруг окружности треугольник ABC, вершины которого лежат на данных прямых.

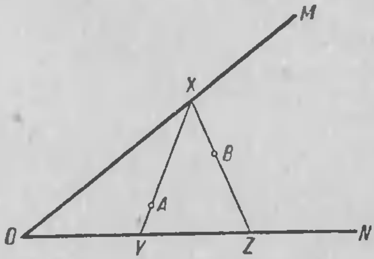
в) Даны прямые l_1, l_2 и l_3, пересекающиеся в одной точке, и на одной из них точка A_1. Постройте треугольник ABC, для которого точка A_1 служила бы серединой стороны BC, а прямые l_1, l_2, l_3 — перпендикулярами, восставленными к сторонам треугольника в их серединах.

Обобщением задач 25 а) и в) являются задачи 38 б) и а), стр. 57. Значительным обобщением задачи 25 б) являются задачи 183 б) из § 5 гл. I третьей части книги и 283 из § 5 гл. II той же части.

26. а) Постройте треугольник, зная основание $AB = a$, высоту h, опущенную на основание, и разность γ углов при основании.

б) Постройте треугольник, зная две стороны AC и BC и разность γ углов, прилежащих к третьей стороне.

27. Даны угол MON и точки A и B. Найдите на стороне OM такую точку X, чтобы треугольник XYZ, где Y и Z—точки пересечения XA и XB с ON, был равнобедренным: $XY=XZ$ (черт. 37).

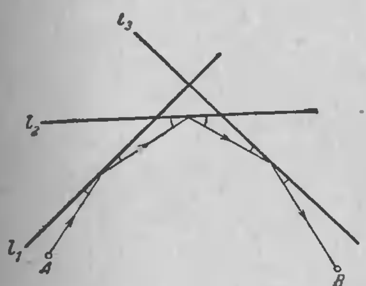


Черт. 37.

28. а) Постройте четырёхугольник $ABCD$, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A, зная длины всех сторон четырёхугольника.

б) Постройте четырёхугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность, зная две соседние стороны AB и AD и углы при вершинах B и D.

29. а) Бильярдный шар отражается от прямолинейного борта бильярда таким образом, что две прямые, по которым он двигался до и после удара, одинаково наклонены к борту. Пусть в плоскости даны n прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и две точки A и B. В каком направлении должен быть пущен шар из точки A, чтобы он, отразившись последовательно от прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, прошёл через точку B (см. черт. 38, где $n=3$).



Черт. 38.

б) Пусть $n=4$ и прямые l_1, l_2, l_3, l_4 образуют прямоугольник, а точка B совпадает с точкой A. Докажите, что в этом случае длина всего пути бильярдного шара от точки A до возвращения в ту же точку равна сумме диагоналей прямоугольника (и, следовательно, не зависит от положения точки A). Докажите также, что если шар при возвращении в точку A не будет задержан, то он, отразившись ещё раз последовательно от четырёх сторон прямоугольника, снова возвратится в точку A.

30. а) Дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. Найдите на прямой l точку X такую, чтобы сумма расстояний $AX+XB$ имела заданную величину a.

б) Даны прямая l и точки A и B по разные стороны от неё. Найдите на прямой l точку X такую, чтобы разность расстояний $AX - XB$ имела заданную величину a.

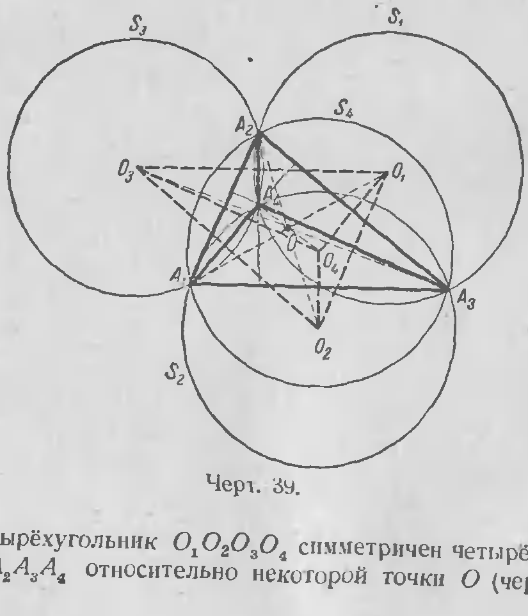
31. а) Докажите, что три точки, симметричные точке пересечения высот H произвольного треугольника ABC относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Постройте треугольник ABC по трём данным точкам H_1, H_2, H_3, симметричным точке пересечения высот треугольника относительно его сторон.

32. На плоскости даны четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4, причём точка A_4 является точкой пересечения высот треугольника $A_1A_2A_3$. Обозначим окружности, описанные вокруг треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$, через S_4, S_3, S_2 и S_1, а центры этих окружностей — через O_4, O_3, O_2 и O_1. Докажите, что

а) A_1 является точкой пересечения высот треугольника $A_2A_3A_4$, A_2 — точкой пересечения высот треугольника $A_1A_3A_4$, A_3 — точкой пересечения высот треугольника $A_1A_2A_4$;

б) окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 равны между собой;



Черт. 39.

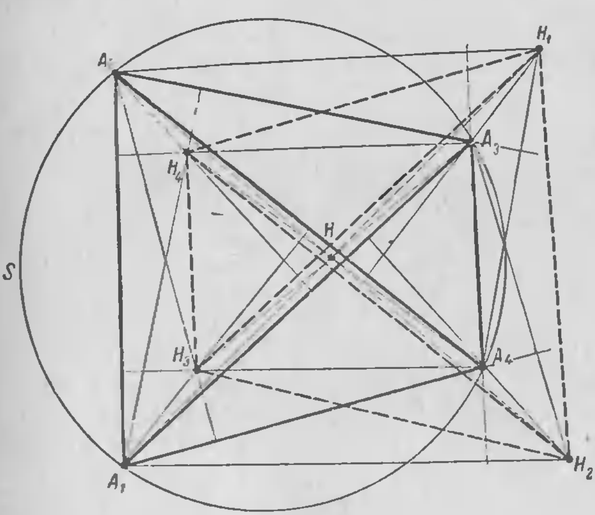
в) четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ симметричен четырёхугольнику $A_1A_2A_3A_4$ относительно некоторой точки O (черт. 39).

[Другими словами, если точки A_1, A_2, A_3 и A_4 расположены так, что каждая точка является точкой пересечения высот треугольника, образованного тремя другими, то четыре отрезка, соединяющих каждую из точек с центром окружности, проходящей через три остальные точки, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.]

33. На плоскости даны четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4, расположенные на одной окружности S. Точки пересечения высот треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$ обозначим через H_4, H_3, H_2 и H_1. Докажите, что

а) четырёхугольник $H_1H_2H_3H_4$ симметричен четырёхугольнику $A_1A_2A_3A_4$ относительно некоторой точки H (черт. 40).

[Другими словами, если точки A_1, A_2, A_3 и A_4 расположены на одной окружности, то четыре отрезка, соеди-



Черт. 40.

няющих каждую из этих точек с точкой пересечения высот треугольника, образованного тремя остальными, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.];

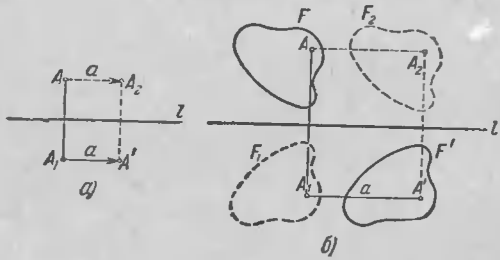
б) четвёрки точек A_1, A_2, H_3, H_4; A_1, A_3, H_2, H_4; A_1, A_4, H_2, H_3; A_2, A_3, H_1, H_4; A_2, A_4, H_1, H_3; A_3, A_4, H_1, H_2 и H_1, H_2, H_3, H_4 лежат каждая на одной окружности.

При этом семь окружностей, на которых лежат эти четвёрки точек, равны между собой и равны S.

34. Докажите, что если многоугольник имеет несколько (больше двух) осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

Ряд других задач, использующих симметрию относительно прямой, приведён в § 2 гл. II второй части книги.

Пусть точка A_1 симметрична точке A относительно прямой l, а точка A' получается из A_1 параллельным переносом на расстояние a в направлении той же самой прямой (черт. 41, a). В таком случае говорят, что точка A' получается из точки A скользящей симметрией с осью l и величиной

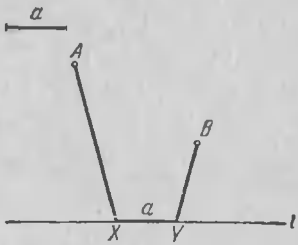


Черт. 41.

параллельного переноса a. Другими словами, *скользящая симметрия есть сумма симметрии относительно прямой l и параллельного переноса в направлении той же самой прямой* (причём взятых в любом порядке, как легко видеть на черт. 41, a; здесь A_2 получается из A параллельным переносом в направлении l на расстояние a, а A' получается из A_2 симметрией относительно l).

Совокупность всех точек, в которые переходят при скользящей симметрии точки некоторой фигуры F, образует фигуру F', получающуюся скользящей симметрией из фигуры F (черт. 41, $б$). Очевидно, что и, обратно, фигуру F можно получить из F' скользящей симметрией с той же самой осью l (и противоположным направлением параллельного перенсса); это позволяет говорить о фигурах, получающихся скользящей симметрией друг из друга.

35. Даны прямая l, две точки A и B по одну сторону от неё и отрезок a. Найдите на прямой l такой отрезок XY длины a, чтобы длина ломаной $AXYB$ была наименьшей (черт. 42).



Черт. 42.

36. а) Постройте четырёхугольник $ABCD$, у которого $\angle C = \angle D$, зная стороны AB и CD, сумму сторон BC и AD и расстояние d от вершины A до стороны CD.

б) Постройте четырёхугольник $ABCD$, зная стороны AB и CD, сумму сторон BC и AD и расстояния d_1 и d_2 от вершин A и B до стороны CD.

Докажем теперь несколько предложений о сложении симметрий относительно прямой.

1°. *Сумма двух симметрий относительно одной и той же прямой есть тождественное преобразование.*

Действительно, если симметрия относительно прямой l переводит точку A в точку A' (см. черт. 33, a, стр. 42), то повторная симметрия относительно l переводит A' обратно в A, т. е. в результате двух симметрий положение точки A не меняется.

Иначе утверждение 1° можно выразить так: *две симметрии относительно одной и той же прямой взаимно уничтожаются.*

2°. *Сумма двух симметрий относительно параллельных прямых есть параллельный перенос в направлении, перпендикулярном к этим прямым, на величину, равную удвоенному расстоянию между ними.*

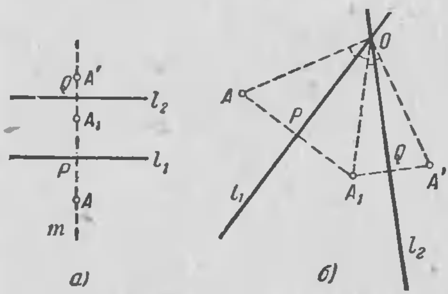
Пусть A — произвольная точка плоскости, A_1 — точка, симметричная A относительно прямой l_1, A' — точка, симметричная A_1 относительно прямой l_2, параллельной l_1 (черт. 43, a). $AA_1 \perp l_1$ и $A_1A' \perp l_2$; следовательно, точки A, A_1 и A' лежат на одной прямой m, перпендикулярной к l_1 и l_2. Если P и Q — точки пересечения прямой m с l_1 и l_2, то $AP = PA_1$, $A_1Q = QA'$ и, например, в случае, изображённом на черт. 43, *а*[1]),

$$AA' = AP + PA_1 + A_1Q + QA' = 2PA_1 + 2A_1Q = 2PQ.$$

Итак, $AA' \perp l_1$ и $AA' = 2PQ$, что и требовалось доказать.

Предложение 1° можно считать частным случаем предложения 2°, получающимся из 2° при $PQ = 0$.

3°. *Сумма двух симметрий относительно пересекающихся прямых есть вращение с центром в точке пересечения этих прямых и углом поворота, равным удвоенному углу между ними.*



Черт. 43.

Пусть A — произвольная точка плоскости, A_1 — точка, симметричная A относительно прямой l_1, A' — точка, симметричная A_1 относительно прямой l_2, пересекающей l_1 в точке O (черт. 43, *б*). Если P и Q — точки пересечения AA_1 с l_1 и A_1A' с l_2, то $\triangle AOP = \triangle A_1OP$, $\triangle A_1OQ = \triangle A'OQ$. Отсюда имеем $OA = OA_1$, $OA_1 = OA'$; $\angle AOP = \angle POA_1$, $\angle A_1OQ = \angle QOA'$ и, например, в случае, изображённом на черт. 43, *б*[2]),

$$\angle AOA' = \angle AOP + \angle POA_1 + \angle A_1OQ + \angle QOA' = 2\angle POA_1 + 2\angle A_1OQ = 2\angle POQ.$$

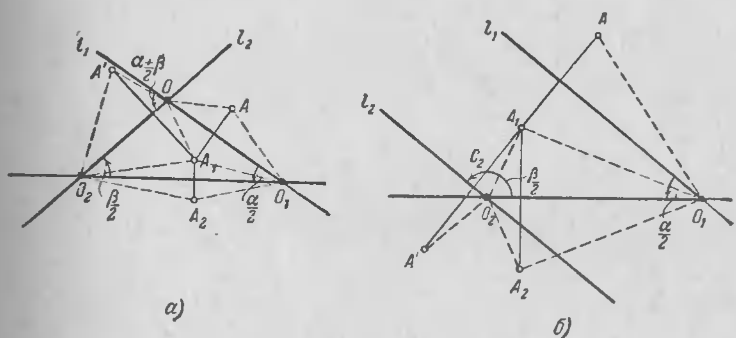
[1]) Для того чтобы сделать это доказательство не зависящим от чертежа, надо воспользоваться понятием направленных отрезков прямой (см. мелкий шрифт на стр. 24—25).

[2]) Для того чтобы сделать это рассуждение не зависящим от чертежа, надо воспользоваться понятием направленных углов (см. мелкий шрифт на стр. 33).

Итак, $OA = OA'$ и $\angle AOA' = 2\angle POQ$, что и требовалось доказать [1]).

Предложения 2° и 3° позволяют дать простое доказательство теорем о сложении вращений или вращения и параллельного переноса.

Пусть требуется, например, найти сумму двух вращений с центрами O_1 и O_2 и углами поворота α и β. В силу 3° первое вращение можно заменить суммой двух симметрий относительно прямых l_1 и O_1O_2, где l_1 проходит через O_1 и $\angle l_1O_1O_2 = \frac{\alpha}{2}$; второе вращение можно заменить суммой двух симметрий относительно прямых O_1O_2 и l_2, где l_2 проходит через O_2 и $\angle O_1O_2l_2 = \frac{\beta}{2}$ (черт. 44). Тогда сумма двух вращений заменится суммой четырёх симметрий относительно прямых l_1, O_1O_2, O_1O_2 и l_2. Но две средние из этих четырёх



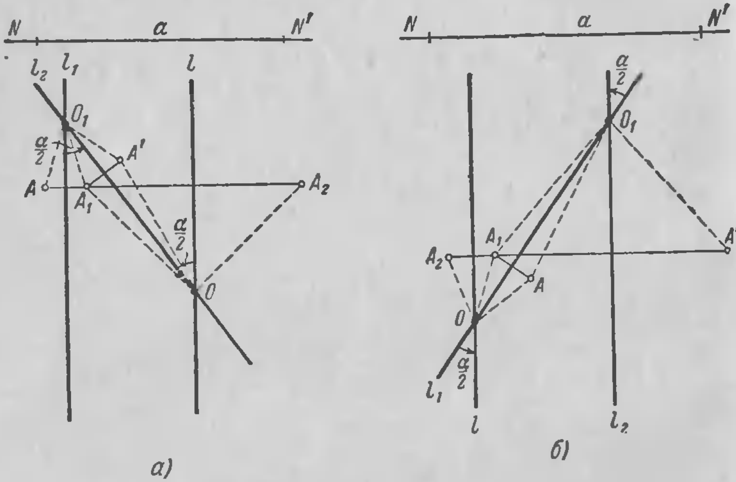
Черт. 44.

симметрий имеют одну и ту же ось и поэтому в силу 1° взаимно уничтожаются. Таким образом, сумма четырёх симметрий относительно прямых l_1, O_1O_2, O_1O_2 и l_2 совпадает с суммой двух симметрий относительно прямых l_1 и l_2. Если l_1 и l_2 пересекаются в точке O, то в силу 2° сумма этих двух симметрий есть вращение с центром O и углом поворота $2l_1OO_2$, который, как видно из черт. 44, *а*, равен сумме углов $2l_1O_1O_2 = \alpha$ и $2O_1O_2l_2 = \beta$ (l_1OO_2 есть внешний угол треугольника O_1O_2O). Если же l_1 и l_2 параллельны (из черт. 44, *б* видно, что этот случай будет иметь место, когда $\angle l_1O_1O_2 + \angle O_1O_2l_2 = 180°$,

[1]) Из доказательств пп. 2° и 3° нетрудно усмотреть, что сумма двух симметрий относительно прямых зависит от порядка, в котором производятся эти симметрии (за исключением того единственного случая, когда прямые взаимно перпендикулярны и сумма симметрий, произведённых в любом порядке, представляет собой симметрию относительно точки их пересечения).

т. е. когда $\alpha+\beta=360°$), то в силу 2° сумма симметрий относительно l_1 и l_2 представляет собой параллельный перенос. Тем самым мы снова приходим к тем же результатам, что и раньше (см. выше, стр. 36—37).

Найдём теперь сумму параллельного переноса в направлении NN' на величину a и вращения с центром O и углом поворота α. Параллельный перенос заменим суммой двух симметрий относительно прямых l_1 и l, перпендикулярных к NN', расстояние между которыми равно $\frac{a}{2}$; пусть при этом l проходит через O (черт. 45, a). Вращение заменим суммой двух симметрий относительно прямых l и l_2, где l_2



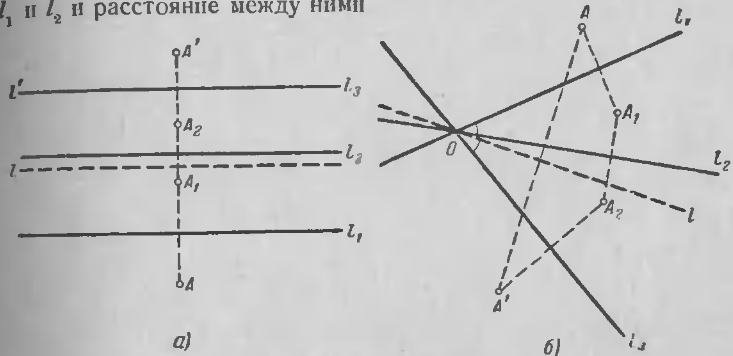
Черт. 45.

проходит через O и $\angle lOl_2=\frac{\alpha}{2}$. Тогда сумма параллельного переноса и вращения заменится суммой четырёх симметрий относительно прямых l_1, l, l и l_2. Две средние из этих четырёх симметрий в силу 1° взаимно уничтожатся; поэтому у нас останется сумма двух симметрий относительно прямых l_1 и l_2, которая в силу 3° представляет собой вращение вокруг точки O_1 пересечения l_1 и l_2 на угол $2\angle l_1O_1l_2=$ $=2\angle lOl_2=\alpha$ (см. черт. 45, a).

Точно так же показывается, что сумма вращения с центром O и углом поворота α и параллельного переноса в направлении NN' на расстояние a есть вращение с тем же углом поворота α. Для того чтобы найти центр O_1 этого вращения, следует провести через O прямые l и l_1, где $l\perp NN'$ и $l_1Ol=\frac{\alpha}{2}$, и прямую $l_2\parallel l$, отстоящую от l на расстояние $\frac{a}{2}$. O_1 есть точка пересечения l_1 и l_2 (черт. 45, $б$).

4°. *Сумма симметрий относительно трёх параллельных прямых или относительно трёх прямых, пересекающихся в одной точке, есть симметрия относительно прямой.*

Предположим сначала, что оси симметрий l_1, l_2 и l_3 параллельны (черт. 46, *а*). В силу 2° сумма симметрий относительно прямых l_1 и l_2 представляет собой параллельный перенос в направлении, перпендикулярном к l_1 и l_2, на расстояние, равное удвоенному расстоянию между ними, и совпадает с суммой симметрий относительно любых других прямых l и l' таких, что они параллельны l_1 и l_2 и расстояние между ними



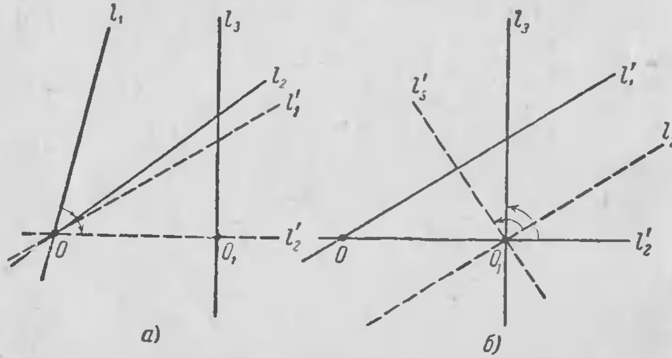
Черт. 46.

равно расстоянию между l_1 и l_2. Предположим теперь, что l' совпадает с l_3, и заменим сумму наших трёх симметрий суммой симметрий относительно прямых l, $l'=l_3$ и l_3. В силу 1° последние две из этих симметрий взаимно уничтожатся и останется симметрия относительно l.

Пусть теперь прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке O (черт. 46, *б*). В силу 3° сумма симметрий относительно l_1 и l_2 представляет собой вращение вокруг O на угол $2\angle l_1Ol_2$ и совпадает с суммой симметрий относительно прямых l и l_3, где l проходит через O и $\angle lOl_3=\angle l_1Ol_2$. Поэтому сумма симметрий относительно l_1, l_2 и l_3 равносильна сумме симметрий относительно l, l_3 и l_3 или одной симметрии относительно l (ибо две последовательные симметрии относительно l_3 взаимно уничтожаются).

5°. *Сумма симметрий относительно трёх прямых, пересекающихся попарно в трёх точках, или таких, что* *две из них параллельны между собой, а третья их пересекает, есть скользящая симметрия.*

Пусть прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O (черт. 47, *а*). Сумма симметрий относительно l_1 и l_2 есть вращение с центром O и углом поворота $2\angle l_1Ol_2$ (см. 3°); поэтому сумму этих симметрий можно заменить суммой симметрий относительно любых двух прямых l'_1 и l'_2, пересекающихся в той же



Черт. 47.

точке O и образующих тот же угол, что и l_1 и l_2. Выберем прямые l'_1 и l'_2 так, чтобы было $l'_2 \perp l_3$, и заменим сумму симметрий относительно l_1, l_2 и l_3 суммой симметрий относительно прямых l'_1, l'_2 и l_3 (т. е. суммой симметрий относительно прямой l'_1 и точки O_1 пересечения l'_2 и l_3, ибо в силу 3° сумма симметрий относительно взаимно перпендикулярных прямых есть симметрия относительно точки их пересечения).

Заменим теперь сумму симметрий относительно взаимно перпендикулярных прямых l'_2 и l_3 суммой симметрий относительно новых взаимно перпендикулярных прямых l''_2 и l'_3, пересекающихся в той же точке O_1, и таких, что $l''_2 \parallel l'_1$ (черт. 47, *б*; эта замена законна, так как сумма симметрий относительно l''_2 и l'_3 тоже есть симметрия относительно O_1). При этом сумма симметрий относительно l'_1, l'_2 и l_3 заменится суммой симметрий относительно l'_1, l''_2 и l'_3. Но в силу 2° сумма симметрий относительно параллельных прямых l'_1 и l''_2 есть параллельный перенос в направлении l'_3, перпендикулярном к l'_1 и l''_2.

Следовательно, сумма симметрий относительно l'_1, l''_2 и l'_3 равна сумме параллельного переноса в направлении l'_3 и симметрии относительно l'_3, т. е. скользящей симметрии с осью l'_3.

Совершенно так же проводится доказательство и в том случае, когда прямые l_1 и l_2 параллельны, а l_2 и l_3 пересекаются в точке O. [В этом случае следует сначала заменить сумму симметрий относительно l_2 и l_3 суммой симметрий относительно прямых l'_2 и l'_3, пересекающихся в той же точке O, и таких, что $l'_2 \perp l_1$; затем заменить сумму симметрий относительно взаимно перпендикулярных прямых l_1 и l'_2 суммой симметрий относительно взаимно перпендикулярных прямых l'_1 и l''_2, пересекающихся в той же точке O_1, и таких, что $l''_2 = l'_3$.]

Из предложений 2°—5° вытекает также следующая общая теорема:

Сумма чётного числа симметрий относительно прямых есть вращение вокруг точки или параллельный перенос; сумма нечётного числа симметрий относительно прямых есть симметрия относительно прямой или скользящая симметрия.

Действительно, сумму чётного числа симметрий относительно прямых в силу предложений 2° и 3° можно заменить суммой некоторого числа вращений и параллельных переносов. Но сумма любого числа вращений и параллельных переносов есть новое вращение или параллельный перенос (см. по этому поводу гл. I или текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 51—53).

Далее, так как сумма чётного числа симметрий есть вращение или параллельный перенос, то сумму нечётного числа симметрий можно заменить суммой вращения или параллельного переноса и симметрии относительно прямой. В силу предложений 2°, 3° вращение или параллельный перенос можно заменить суммой двух симметрий относительно прямых. Таким образом, сумму нечётного числа симметрий относительно прямых всегда можно заменить суммой трёх симметрий; после этого остаётся лишь воспользоваться предложениями 4°, 5°.

Отметим ещё, что сумма чётного числа симметрий относительно прямой, вообще говоря, представляет собой вращение;

случай, когда эта сумма сводится к параллельному переносу, следует рассматривать как исключительный. [Сумма двух симметрий относительно прямых l_1 и l_2 есть параллельный перенос лишь в том исключительном случае, когда $l_1 \parallel l_2$; сумма двух вращений на углы α и β есть параллельный перенос лишь в том исключительном случае, когда $\alpha + \beta = 360°$, и т. д.] Аналогично этому сумма нечётного числа симметрий относительно прямых, вообще говоря, есть скользящая симметрия; случай, когда сумма нечётного числа симметрий представляет собой симметрию относительно прямой, следует считать исключительным. [Например, сумма трёх симметрий относительно прямых l_1, l_2 и l_3 есть симметрия относительно прямой лишь в том исключительном случае, когда прямые l_1, l_2 и l_3 все параллельны между собой или пересекаются все в одной точке.]

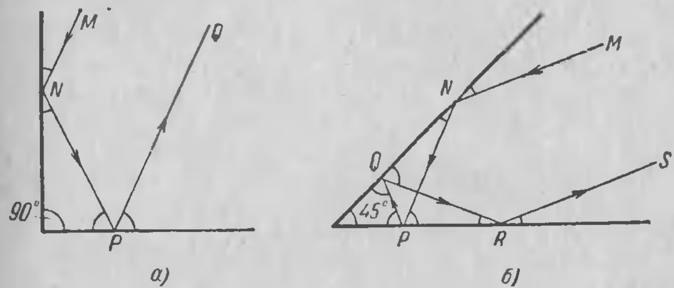
Симметрия относительно прямой и скользящая симметрия — *преобразования плоскости*, переводящие каждую точку A в новую точку A'[1]. *Неподвижными точками* симметрии относительно прямой являются все точки оси симметрии l; *неподвижными прямыми* являются ось l и все прямые, перпендикулярные к l. Единственной *неподвижной прямой* скользящей симметрии является её ось l; *неподвижных точек* скользящая симметрия не имеет вовсе.

37. Луч света отражается от прямолинейного зеркала таким образом, что угол падения равен углу отражения (т. е. по тому же закону, по которому бильярдный шар отражается от борта бильярда; см. задачу 29). На плоскости расположены два прямолинейных зеркала, образующих между собой угол α. Докажите, что если $\alpha = \frac{90°}{n}$, где n — целое число (и только в этом случае!), то любой луч, отразившись несколько раз от обоих зеркал, в конце концов уйдёт в направлении, обратном направлению первоначального падения (см. черт. 48, *а*, *б*, где изобра-

---

[1]) Симметрия относительно прямой является *движением* в смысле определения, приведённого во введении к настоящей части, поскольку это преобразование переводит каждый отрезок AB в отрезок $A'B'$ той же длины (см. черт. 35 на стр. 43 и относящийся к нему текст). Скользящая симметрия является движением, так как она представляет собой сумму двух движений: симметрии относительно прямой и параллельного переноса.

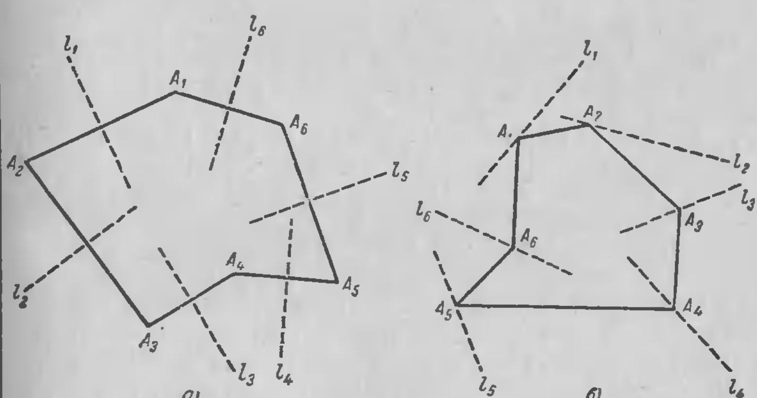
жены случаи $n=1$, $\alpha=90^\circ$ и $n=2$, $\alpha=45^\circ$; в обоих случаях окончательное направление луча PQ, соответст-



Черт. 48.

венно RS, противоположно первоначальному его направлению MN).

38. На плоскости даны n прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Постройте n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, для которого эти прямые являются:



Черт. 49.

а) перпендикулярами к его сторонам, восставленными в их серединах (черт. 49, *а*);

б) биссектрисами внешних или внутренних углов при вершинах (черт. 49, *б*).

Рассмотрите отдельно случаи чётного и нечётного n. В каком случае задача не имеет решения или является неопределённой?

39. На плоскости даны точка M и $n-1$ прямых l_2, $l_3, \ldots, l_n$. Постройте n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$,

а) середина стороны A_1A_2 которого совпадает с точкой M, а перпендикуляры, восставленные к остальным сторонам в их серединах, совпадают с прямыми $l_2, l_3, \ldots, l_n$;

б) угол A_1 которого имеет известную величину α, биссектриса угла A_1 проходит через M, а биссектрисы углов $A_2, A_3, \ldots, A_n$ совпадают с $l_2, l_3, \ldots, l_n$.

40. Впишите в данную окружность n-угольник,

а) стороны которого параллельны n заданным прямым плоскости;

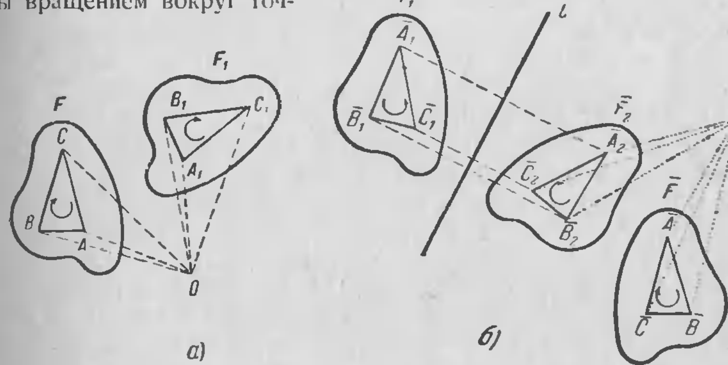
б) сторона A_1A_n которого проходит через известную точку, а остальные стороны параллельны $n-1$ заданным прямым.

Значительным обобщением задач 40 а), б) является задача 183 а) из § 5 гл. I третьей части книги, а также задачи 231 из § 2 и 259 из § 4 гл. II той же части.

§ 2. Собственно-равные и зеркально-равные фигуры. Классификация движений плоскости

Согласно учебнику геометрии для средней школы А. П. Киселёва «*две геометрические фигуры называются равными, если перемещением одной из них в пространстве её можно совместить со второй фигурой*». Это определение приведено в самом начале первой книги Киселёва «Геометрия» и является основным для всего дальнейшего. Однако появление этого определения в начале курса планиметрии может вызвать возражения. Действительно, планиметрия рассматривает свойства фигур плоскости, а в определении равенства говорится о перемещении фигур в пространстве. Таким образом, оказывается, что первое и основное определение курса планиметрии само относится не к планиметрии, а к стереометрии. Поэтому удобнее было бы в курсе планиметрии называть равными такие фигуры, которые можно совместить перемещением одной из них в плоскости, а не в пространстве — такое определение уже не будет использовать стереометрические представления. Однако оказывается, что это новое определение равенства не совпадает с первоначальным.

Действительно, пары равных между собой фигур, расположенных в плоскости, могут быть двух типов. Возможно, что две равные фигуры таковы, что их можно совместить при помощи движения одной из фигур, не выводящего этой фигуры из той плоскости, в которой она первоначально была расположена; таковы, например, фигуры F и F_1 на черт. 50, *а* (они могут быть совмещены вращением вокруг точ-



Черт. 50.

ки O). Но возможно, что две плоские фигуры равны, однако для того чтобы их совместить, необходимо одну из них вынуть из плоскости и перевернуть «на другую сторону». Таковы фигуры $\bar{F}$ и $\overline{F_1}$ на черт. 50, *б*; никаким движением фигуры $\overline{F_1}$, оставляющим её в плоскости, нельзя совместить её с фигурой F.

Действительно, рассмотрим три точки $\overline{A_1}$, $\overline{B_1}$ и $\overline{C_1}$ фигуры $\overline{F_1}$ и соответствующие им точки $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$ фигуры $\bar{F}$. Треугольники $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и $\overline{A_1}\overline{B_1}\overline{C_1}$ имеют, как говорят, «разное направление обхода контура»: в треугольнике $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ обход контура от вершины $\bar{A}$ через вершину $\bar{B}$ к вершине $\bar{C}$ совершается по часовой стрелке, а обход контура треугольника $\overline{A_1}\overline{B_1}\overline{C_1}$ от вершины $\overline{A_1}$ через вершину $\overline{B_1}$ к вершине $\overline{C_1}$ совершается против часовой стрелки. А так как при движении фигуры $\overline{F_1}$ в плоскости направление обхода контура треугольника $\overline{A_1}\overline{B_1}\overline{C_1}$, очевидно, не может меняться, то сколько бы мы ни двигали в плоскости фигуру $\overline{F_1}$, мы никогда не сможем совместить треугольник $\overline{A_1}\overline{B_1}\overline{C_1}$ с треугольником $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$. Но если «перевернуть фигуру $\overline{F_1}$ на другую сторону», для чего достаточно заменить её фигурой $\overline{F_2}$, симметричной $\overline{F_1}$ относительно какой-либо прямой l, то мы уже без труда сможем совместить полученную фигуру $\overline{F_2}$ с $\overline{F}$ движением, оставляющим её в плоскости (вращением вокруг точки $\overline{O}$; см. черт. 50, *б*).

В дальнейшем фигуры, которые можно совместить движением, оставляющим их в плоскости, мы будем называть с о б с т в е н н о - р а в н ы м и; равные фигуры, которые нельзя совместить движением, оставляющим их в плоскости, мы будем называть з е р к а л ь н о - р а в н ы м и. Из предыдущего видно, как различить, являются ли две данные равные фигуры F и F' собственно-равными или зеркально-равными: для этого следует выбрать какие угодно три точки A, B, C фигуры F и соответствующие им точки A', B', C' фигуры F' и посмотреть, являются ли направления обхода контуров треугольников ABC и $A'B'C'$ (от A через B к C, соответственно от A' через B' к C') одинаковыми или противоположными. Две фигуры мы будем называть просто «равными» только в том случае, если нам безразлично, являются ли они собственно-равными или зеркально-равными.

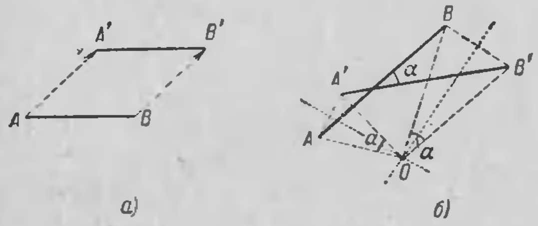
Таким образом, *две геометрические фигуры называются собственно-равными, если перемещением одной из них в плоскости её можно совместить со второй фигурой*, — это определение почти дословно повторяет определение равенства по Киселёву, однако оно уже целиком относится к планиметрии.

Докажем теперь две важные теоремы.

Т е о р е м а 1. *Каждые две собственно-равные фигуры плоскости можно перевести одну в другую при помощи вращения вокруг некоторой точки или при помощи некоторого параллельного переноса.*

Заметим прежде всего, что каждые два равных о т р е з к а AB и $A'B'$ плоскости могут быть переведены один в другой при помощи вращения вокруг некоторой точки O или некоторого параллельного переноса. Действительно, если отрезки

AB и $A'B'$ равны, параллельны и одинаково направлены (черт. 51, a), то AB можно перевести в $A'B'$ при помощи параллельного переноса (см. выше, стр. 22—23, где доказано



Черт. 51.

более общее предложение о двух фигурах F и F', соответствующие отрезки которых равны, параллельны и одинаково направлены); величина и направление этого параллельного переноса определяются отрезком AA'. Если же отрезки AB и $A'B'$ образуют между собой некоторый угол α (черт. 51, $б$)[1]), то AB можно перевести в $A'B'$ при помощи вращения на угол α (см. выше, стр. 34—35, где доказано более общее предложение о двух фигурах F и F', соответствующие отрезки которых равны и образуют между собой угол α); центр O этого вращения можно найти, например, как точку пересечения перпендикуляров, восставленных к отрезкам AA' и BB' в их серединах[2]).

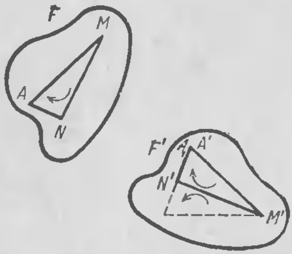
Рассмотрим теперь две собственно-равные фигуры F и F' (черт. 52). Пусть M и N — две произвольные точки фигуры F; им отвечают точки M' и N' фигуры F'. Так как фигуры равны, то $MN = M'N'$ и, значит, существует вращение (или па-

---

[1]) Сюда входит и тот случай, когда отрезки AB и $A'B'$ образуют между собой угол $\alpha = 180°$, т. е. они равны, параллельны и противоположно направлены.

[2]) Если рассматриваемые перпендикуляры совпадают, то предложенное построение не годится; в этом случае O есть точка пересечения самих отрезков AB и $A'B'$ (а если эти отрезки совпадают, т. е. A совпадает с B', а B' — с A, то O есть общая середина AB и $A'B'$). O можно также найти как точку пересечения сегмента, построенного на отрезке AA' и вмещающего угол α, и перпендикуляра, восставленного к AA' в его середине. Наконец, ещё два удобных построения центра вращения, переводящего известный отрезок AB в другой известный отрезок $A'B'$, указаны в § 2 гл. I второй части (см. ниже, стр. 105—106).

раллельный перенос), переводящее отрезок MN в отрезок $M'N'$. Мы утверждаем, что при этом вся фигура F переходит в фигуру F', т. е. что **каждая** точка A фигуры F переходит в соответствующую ей точку A' фигуры F'. Обозначим через A_1 точку, в которую переводит точку A вращение (или параллельный перенос), переводящее MN в $M'N'$; нам надо доказать, что A_1 совпадает с A'. Так как фигуры F и F' равны, то $AM = A'M'$; $AN = A'N'$; с другой стороны, очевидно, и $AM = A_1M'$, $AN = A_1N'$. Отсюда следует, что треугольники $A'M'N'$ и $A_1M'N'$ равны. А так как эти треугольники имеют общую сторону $M'N'$, то они или совпадают, или симметричны относительно $M'N'$. Остаётся только показать, что последний случай невозможен. Треугольники AMN и $A'M'N'$ имеют одинаковое направление обхода контура, так как фигуры F и F' **собственно равны**; треугольники AMN и $A_1M'N'$ тоже имеют одинаковое направление обхода контура, так как они получаются один из другого вращением или параллельным переносом. Отсюда следует, что треугольники $A'M'N'$ и $A_1M'N'$ имеют одинаковое направление обхода контура и поэтому не могут быть симметричны. Значит, эти треугольники совпадают и точка A действительно переходит при вращении (или параллельном переносе) в точку A'. Этим и завершается доказательство теоремы 1.

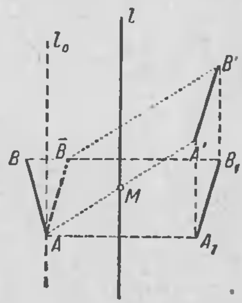


Черт. 52.

Если фигуры F и F' можно перевести одну в другую вращением с центром O, то точка O называется **центром вращения** этих двух фигур. Для построения центра вращения O двух собственно-равных фигур достаточно выбрать две произвольные точки A и B одной фигуры и отвечающие им точки A' и B' второй фигуры; O есть точка пересечения перпендикуляров, восставленных к AA' и BB' в их серединах (см. также сноску[2]) на предыдущей странице).

Теорема 2. *Каждые две зеркально-равные фигуры плоскости можно перевести одну в другую при помощи скользящей симметрии или при помощи симметрии относительно прямой.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Прежде всего покажем, что каждые два равных отрезка AB и $A'B'$ можно перевести один в другой при помощи скользящей симметрии с некоторой осью l (или при помощи симметрии относительно некоторой прямой l). Действительно, предположим, что это так, и пусть l — ось искомой скользящей симметрии (или просто симметрии). Перенесём параллельно отрезок $A'B'$ в новое положение $A\bar{B}$ так, чтобы точка A' перешла в A (черт. 53). Так как отрезок A_1B_1, в который переходит AB при симметрии относительно l, должен быть параллелен $A\bar{B}$ (оба эти отрезка параллельны $A'B'$), то прямая l должна быть параллельна биссектрисе l_0 угла $\bar{B}AB$ (ибо сумма симметрий относительно l_0 и l переводит отрезок $A\bar{B}$ в параллельный ему отрезок A_1B_1). Далее точки A и A' должны быть расположены на равных расстояниях от прямой l по разные стороны от неё (ибо точки A и A_1 расположены на равных расстояниях от l по разные стороны от неё и точки A_1 и A' расположены на равных расстояниях от l по одну сторону от неё). Отсюда следует, что прямая l должна проходить через середину M отрезка AA'. Таким образом, зная отрезки AB и $A'B'$, мы можем построить прямую l (она параллельна l_0 и проходит через M).

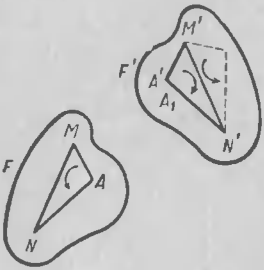


Черт. 53.

Пусть теперь отрезок A_1B_1 симметричен AB относительно построенной прямой l. Так как $l \parallel l_0$, то $A_1B_1 \parallel A'B'$; так как l проходит через M, то точки A_1 и A' равноудалены от l и находятся по одну сторону от неё. Следовательно, если отрезок A_1B_1 не совпадает с $A'B'$, то его можно перевести в $A'B'$ параллельным переносом в направлении прямой l. Отсюда видно, что отрезок AB действительно можно перевести в равный ему отрезок $A'B'$ скользящей симметрией (или просто симметрией относительно прямой).

Заключительная часть доказательства теоремы 2 почти точно повторяет конец доказательства теоремы 1. Пусть F и F' — две зеркально-равные фигуры, MN и $M'N'$ — два произвольных соответствующих отрезка этих фигур (черт. 54).

Существует скользящая симметрия (или просто симметрия), переводящая отрезок MN в отрезок $M'N'$. Докажем, что при этом вся фигура F перейдёт в фигуру F', т. е. что точка A_1, в которую перейдёт произвольная точка A фигуры F, совпадает с точкой A' фигуры F', соответствующей A. Действительно, $\triangle A'M'N' = \triangle AMN$, так как фигуры F и F' равны; $\triangle A_1M'N' = \triangle AMN$, так как $A_1M'N'$ получается из AMN скользящей симметрией (или симметрией относительно прямой). Поэтому $A_1M'N'$ или совпадает с $A'M'N'$, или симметричен $A'M'N'$ относительно общей стороны $M'N'$ этих двух треугольников. Но треугольники $A_1M'N'$ и $A'M'N'$ симметричными быть не могут, так как они имеют одинаковое направление обхода контура. Последнее следует из того, что направление обхода контура треугольников $A'M'N'$ и AMN различно (ибо фигуры F и F' зеркально-равны); направление обхода контура треугольников $A_1M'N'$ и AMN тоже различно (ибо симметрия относительно прямой и скользящая симметрия изменяют направление обхода контура треугольника). Значит, треугольник $A_1M'N'$ обязательно совпадает с треугольником $A'M'N'$, что и завершает доказательство теоремы 2.



Черт. 54.

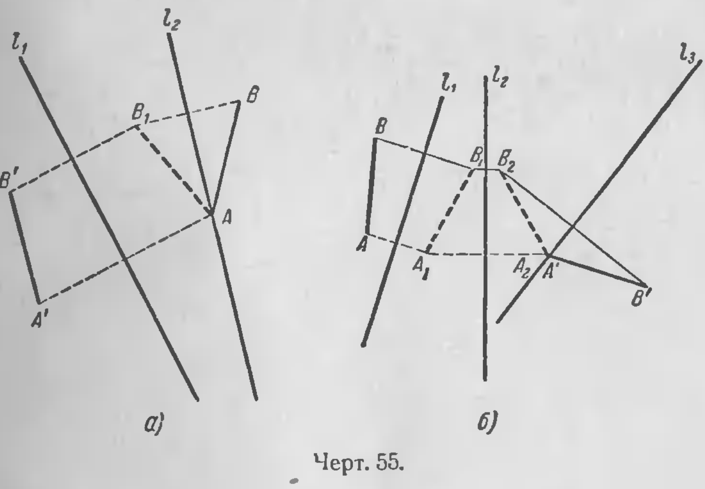
Движения, переводящие собственно-равные фигуры одну в другую, часто называют собственными движениями; в противоположность этому движения, совмещающие зеркально-равные фигуры, называют симметриями (заметим, что согласно этим определениям симметрия относительно точки является не симметрией, а собственным движением!). Теоремы 1 и 2 утверждают что, каждое собственное движение сводится к параллельному переносу или к вращению вокруг точки, а каждая симметрия — к симметрии относительно прямой или к скользящей симметрии (ср. с текстом на стр. 67).

Объединяя результаты теорем 1 и 2, можно сформулировать следующее общее предложение:

Каждые две равные фигуры плоскости можно перевести одну в другую при помощи параллельного переноса *или вращения вокруг точки, или симметрии относительно прямой, или скользящей симметрии.*

При этом если две фигуры собственно-равны, то их, вообще говоря, можно совместить вращением вокруг точки; случай, когда фигуры получаются одна из другой параллельным переносом, будет представлять исключение. Если фигуры зеркально-равны, то их, вообще говоря, можно совместить при помощи скользящей симметрии; случай, когда фигуры получаются одна из другой симметрией относительно прямой, будет представлять исключение.

Теоремы 1 и 2 можно также вывести из предложений о сложении симметрий относительно прямой (см. выше, стр. 49—55). Действительно. доказательство теоремы 1 основывалось на том, что каждые два равных отрезка AB и $A'B'$ можно перевести один в другой при помощи вращения или параллельного переноса. Но, очевидно, AB можно перевести в $A'B'$ при помощи последовательных симметрий относительно двух прямых l_1 и l_2: достаточно выбрать в качестве l_1 перпендикуляр, восставленный к отрезку AA' в его середине (если A' совпадает с A, то за l_1 можно выбрать любую прямую, проходящую через A), а за l_2 — биссектрису угла B_1AB, где B_1 — точка, симметричная B относительно l_1 (черт. 55, *а*). Далее остаётся только воспользоваться пред-



Черт. 55.

ложениями 2° и 3°, стр. 49—50. Доказательство теоремы 2 основывалось на том, что каждые два равных отрезка AB и $A'B'$ можно перевести один в другой при помощи скользящей симметрии или симметрии относительно прямой. Но AB можно перевести в $A'B'$ при помощи последовательных симметрий относительно трёх прямых l_1, l_2 и l_3: ось l_1 первой симметрии при этом можно выбрать совершенно произвольно, а прямые l_2 и l_3 подобрать так, чтобы сумма симметрий относительно этих двух прямых переводила отрезок A_1B_1, симметричный AB относительно l_1, в $A'B'$ (черт. 55, *б*). Далее остаётся только воспользоваться предложениями 4° и 5°, стр. 53—54.

Обратно, все предложения о сложении движений можно вывести из теорем 1 и 2. Так, теорема 1 утверждает, что каждые две собственно-равные фигуры можно получить одну из другой при помощи вращения или параллельного переноса. Но если две фигуры F и F' получаются одна из другой с помощью двух симметрий относительно прямой или вообще чётного числа симметрий, то эти фигуры собственно-равны (ибо одна симметрия относительно прямой меняет направление обхода контура треугольника, а две симметрии не меняют его). Поэтому F' можно получить из F вращением или параллельным переносом, т. е. *сумма двух симметрий относительно прямой* (или вообще чётного числа симметрий) *есть вращение или параллельный перенос* (см. выше, стр. 55). Совершенно аналогично из теоремы 2 выводится, что *сумма трёх симметрий относительно прямой* (или вообще нечётного числа симметрий) *есть скользящая симметрия или симметрия относительно прямой* (см. выше, стр. 55). Из теоремы 1 также следует, что *сумма двух вращений есть вращение или параллельный перенос* (см. выше, стр. 36 или текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 51—52), *сумма двух скользящих симметрий есть вращение или параллельный перенос*, и т. д.

41. Даны прямые l_1 и l_2, точка A на прямой l_1 и точка B на прямой l_2. Проведите прямую m, пересекающую прямые l_1 и l_2 в точках X и Y так, что $AX = BY$ и

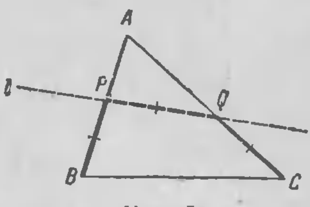
а) прямая m параллельна данной прямой n;

б) прямая m проходит через известную точку M;

в) отрезок XY имеет данную длину a;

г) отрезок XY известной прямой r делится пополам.

В другой связи задачи 41 а) и б) приведены в § 5 гл. I третьей части книги (см. задачу 186 а) и примечание к решению этой задачи).



Черт. 56.

42. Даны три прямые l_1, l_2 и l_3 и три точки A, B и C—по точке на каждой из прямых. Проведите прямую m, пересекающую прямые l_1, l_2 и l_3 в точках X, Y и Z таких, что $AX = BY = CZ$.

43. Дан треугольник ABC. Проведите прямую l, пересекающую его стороны AB и AC в таких точках P и Q, что $BP = PQ = QC$ (черт. 56).

Теоремы 1 и 2 можно положить в основу определения движений плоскости. Действительно, когда мы в геометрии говорим о движении, нас интересует только результат перемещения фигуры из одного положения в другое, но не сам процесс перемещения (пути, описываемые отдельными точками фигуры во время движения, скорости этих точек и т. д.). А так как в силу теорем 1 и 2 любые две равные фигуры могут быть совмещены при помощи параллельного переноса, или вращения, или симметрии относительно прямой, или скользящей симметрии, то в геометрии можно считать, что все движения плоскости исчерпываются этими четырьмя видами движений[1]). Это перечисление всех возможных движений может служить определением движений плоскости. Поэтому можно сказать, что геометрия изучает свойства фигур, не меняющиеся при параллельных переносах, вращениях, симметриях относительно прямой и скользящих симметриях (см. введение к настоящей главе, стр. 17).

В математике (и вообще в науке) встречаются определения двух разных типов. Новое понятие может быть определено перечислением свойств, которым оно должно удовлетворять: так, например, параллельные прямые плоскости определяются как такие прямые, которые не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали; арифметическая прогрессия — как такой ряд чисел, что разность любых двух соседних чисел этого ряда имеет одно и то же значение; паровая машина — как механизм, преобразующий тепловую энергию в механическую. Определения такого типа называются описательными (или дескриптивными). Можно также определить новое понятие и не через его свойства, а непосредственно указав построение определяемого объекта. Так, параллельные прямые можно определить как два перпендикуляра к одной и той же прямой (здесь указано, как строить параллельные прямые); арифметическую прогрессию — как ряд чисел a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, ... (где число a называется первым членом, а число d — разностью прогрессии); определением паровой машины можно считать описание её

[1]) В противоположность этому в механике, изучающей процесс движения, уже нельзя дать столь простого перечисления всех плоских движений.

устройства. Такого рода определения называются **конструктивными**. Можно сказать, что основной задачей науки является нахождение конструктивных определений для понятий, до этого определённых лишь описательно. Так, проблема создания парового двигателя заключалась в том, чтобы на основе описательного определения этой машины как механизма, преобразующего тепловую энергию в механическую, получить конструктивное определение, т. е. сконструировать двигатель [1]).

Определение движения как преобразования, не меняющего расстояний между точками (см. введение к настоящей главе, стр. 17), является типичным описательным определением. И основной задачей теории движений следует считать задачу нахождения конструктивного определения движений, т. е. задачу перечисления всех движений плоскости. Именно эта задача и решается теоремами 1 и 2 этого параграфа, которые поэтому следует считать основными в настоящей части.

Обратно, имея конструктивное определение какого-либо понятия, часто оказывается удобным найти ещё и достаточно простое описательное определение, которое может оказаться удобным для изучения свойств нового объекта. Примеры такого рода мы тоже имели в этой главе. Так, после первого, конструктивного определения параллельного переноса мы дали ещё следующее чисто описательное определение этого преобразования: параллельный перенос есть такое преобразование плоскости, при котором каждый отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$, равный, параллельный и одинаково направленный с отрезком AB (см. выше, стр. 22—23). Это определение оказалось очень удобным для решения вопроса о том, что

---

[1]) Заметим ещё, что нахождение конструктивного определения какого-либо объекта, определённого до этого лишь описательно, служит одновременно и **доказательством существования** этого объекта; из одного же описательного определения существование ещё вовсе не вытекает. Примерами описательных определений, которым не отвечают никакие реально существующие объекты, являются следующие определения: «рениксой называется треугольник, две биссектрисы которого взаимно перпендикулярны» (ср. решение задачи 25 а) из § 1 этой главы) или «вечным двигателем называется механизм, способный производить работу без затраты энергии»; конструктивные определения в этих случаях, разумеется, невозможны.

представляет собой сумма двух параллельных переносов; первое же (конструктивное) определение параллельного переноса для решения этого вопроса подходило гораздо меньше. Точно так же решение вопроса о сумме двух вращений основывалось на следующем описательном определении вращения: вращение есть такое преобразование плоскости, при котором каждый отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$, равный AB и составляющий с AB известный угол α (см. выше, стр. 34—35). Другие примеры подобного рода читатель сам разыщет как в первой части, так и в последующих частях книги.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

ВВЕДЕНИЕ
ЧТО ТАКОЕ ГЕОМЕТРИЯ? (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Во введении к первой части мы определили геометрию как науку, изучающую свойства фигур, не меняющиеся при движениях, а движения — как преобразования, не меняющие расстояния между двумя точками фигуры (см. выше, стр. 17). Отсюда немедленно следует, что важнейшими геометрическими свойствами фигуры будут как раз расстояния между различными её точками, так что понятие расстояния между точками — длины отрезка — является самым важным во всей геометрии. Однако если внимательно пересмотреть все теоремы элементарной геометрии, приведённые в школьном учебнике Киселёва, то мы убедимся, что в этих теоремах понятие расстояния между точками почти не фигурирует. Все теоремы о параллельных и перпендикулярных прямых (например, теоремы: «если две параллельные прямые пересечены какой-нибудь прямой, то соответственные углы равны» или «из всякой точки, лежащей вне прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один»), большинство теорем об окружности (например, «через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну»), многие теоремы о треугольниках и многоугольниках (например, «сумма углов треугольника равна двум прямым», «диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам») никак не связаны с понятием расстояния. Но даже и в тех теоремах, в формулировке которых участвует длина отрезка (например, «биссектриса любого угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника», «в одном круге или в равных кругах из двух неравных хорд бо́льшая ближе к центру», или теорема Пифагора: «если стороны прямоугольного треугольника измерены одной и той же единицей, то квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов»), на самом деле фигурируют не длины каких-либо отрезков, а только отношения длин двух или большего их числа. В этом легко убедиться, если вдуматься в содержание этих теорем. Например, в теореме Пифагора играют роль не длины сторон треугольника, а только отношения длин катетов к длине гипотенузы: в силу этой теоремы катеты b и c прямоугольного треугольника ABC должны составлять такие части гипотенузы a, что если обозначить эти части через k и l (т. е. $\frac{b}{a}=k, \frac{c}{a}=l$), то $k^2+l^2=1$.

Нетрудно понять общую причину, с которой связано это положение. Понятие длины отрезка существенно использует наличие какой-то фиксированной меры для измерения длин; числа, выражающие длину одного и того же отрезка, являются различными, если измерять этот отрезок сантиметрами, или километрами, или дюймами. Но содержание геометрической теоремы не может зависеть от того, какую единицу измерения длин мы выбрали. Отсюда и вытекает, что в геометрической теореме не может участвовать никакая длина сама по себе, а могут встречаться лишь отношения длин двух или нескольких отрезков (которые не зависят, разумеется, от выбора единицы длины). Так, формулировка теоремы Пифагора начинается со слов: «если стороны прямоугольного треугольника измерены одной и той же единицей, то ...»; это и означает, что в теореме говорится про отношения длин сторон треугольника: если нам известно, что длины нескольких отрезков измерены в одних и тех же единицах, но мы не знаем, в каких именно, то мы можем судить только об отношении длин этих отрезков. Потребовать же в условии какой-нибудь теоремы, чтобы отрезок обязательно измерялся определённой единицей длины, скажем метрами, конечно, нельзя: ясно, что теорема не может быть справедливой только в том случае, если отрезки измеряются метрами, и неверной, если они измеряются, например, сантиметрами.

Таким образом, мы видим, что понятие расстояния между точками, которое согласно данному нами определению геометрии должно было бы играть в геометрии основную роль, на самом деле совсем не может участвовать в геометрических теоремах. На это обстоятельство обратил внимание ещё Ф. Клейн, который впервые дал научное определение геометрии. На самом деле определение Клейна несколько отличалось от того, которое было приведено во введении к части первой. А именно, оно гласило: *геометрия есть наука, изучающая свойства геометрических фигур, не меняющиеся при преобразованиях подобия.* Преобразования же подобия можно определить как *преобразования, при которых не меняются отношения расстояний пар точек*; можно также это абстрактное определение преобразований подобия заменить полным описанием всех таких преобразований, которое будет дано в § 2 гл. I настоящей части. Определение Клейна выражает то, что в определённом смысле для геометра неразличимы не только равные, но даже и подобные фигуры; действительно, про два треугольника можно определённо утверждать, что они равны, а не подобны, только в том случае, если мы имеем фиксированную раз навсегда единицу длины, с помощью которой можно измерить стороны обоих треугольников. Именно эта «неразличимость» подобных фигур делает возможным изображение на чертеже фигур больших размеров; из неё исходит преподаватель, когда он предлагает учащимся «точно» воспроизвести в тетрадях выполненный им на доске чертёж, который без подобного уменьшения, конечно, никогда не поместился бы на тетрадном листе [1]).

Таким образом, мы видим, что фактически основную роль в элементарной геометрии играют преобразования подобия; это делает важным специальное изучение таких преобразований. При этом изучение преобразований подобия, помимо того, что оно представляет большой принципиальный интерес, оказывается также чрезвычайно полезным для решения разнообразных задач; в этом отношении преобразования подобия, пожалуй, не уступают движениям. Для примера можно указать задачу о построении четырёхугольника, подобного данному, стороны которого проходят через четыре известные точки (см. задачу 79б) из § 1 гл. II, стр. 128); эта задача является обобщением следующих трёх известных задач, которые обыкновенно

---

[1]) Впрочем, в некоторых случаях приведённому здесь определению геометрии всё же приходится предпочесть определение, данное во введении к части первой. Подробнее об этом мы будем говорить во введении к третьей части книги.

решаются с использованием специальных свойств квадрата, прямоугольника и ромба[1]):

а) построить квадрат, стороны которого проходят через четыре заданные точки;

б) построить прямоугольник с известным отношением сторон, стороны которого проходят через четыре заданные точки;

в) построить ромб с данным углом, стороны которого проходят через четыре заданные точки.

Ниже читатель найдёт и много других задач, которые решаются с применением преобразований подобия.

Отметим ещё, что так как движения представляют собой частный случай преобразований подобия, то целый ряд задач, в решении которых используются движения, можно значительно обобщить, если вместо движений применить в решении преобразования подобия. Так, например, задачу о построении многоугольника по известным вершинам равнобедренных треугольников с данными углами при вершинах, построенных на его сторонах (об этой задаче мы говорили во введении к первой части), можно обобщить следующим образом:

На плоскости даны n точек, являющихся вершинами треугольников, построенных на сторонах некоторого n-угольника как на основаниях и подобных n данным треугольникам. Построить этот n-угольник (см. задачу 66 из § 2 гл. I, стр. 107).

Большое число других примеров такого рода читатель найдёт в гл. I этой части.

---

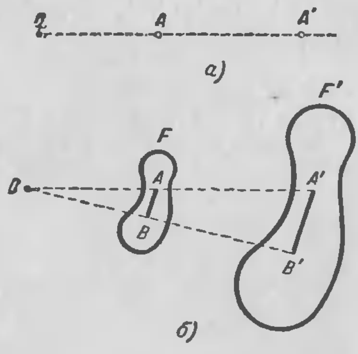
[1]) См., например, книгу Д. О. Шклярский и др., Избранные задачи и теоремы из элементарной математики, ч. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1952, задачи 70 а, б, в.

ГЛАВА I

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ

§ 1. Центрально-подобное преобразование (гомотетия)

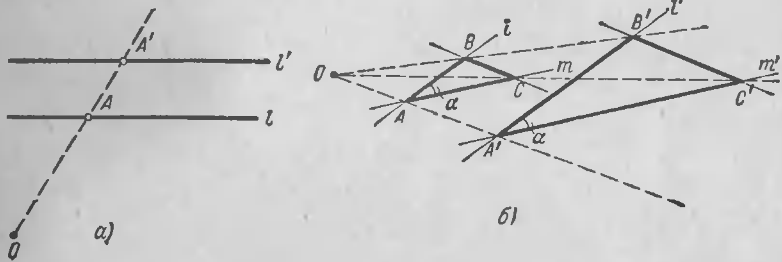
Точка A' называется центрально-подобной (или гомотетичной) точке A относительно центра подобия O с коэффициентом подобия k, если A' лежит на прямой OA по ту же сторону от точки O, что и A, и $\frac{OA'}{OA}=k$ (черт. 57, *а*). Преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в точку A', центрально-подобную ей относительно центра подобия O с коэффициентом подобия k, называется центрально-подобным преобразованием (гомотетией); точка O называется центром и число k — коэффициентом этого преобразования. Совокупность всех точек, центрально-подобных точкам некоторой фигуры F, образует фигуру F', центрально-подобную F (относительно центра подобия O с коэффициентом подобия k) (черт. 57, *б*). Очевидно, что фигура F в свою очередь центрально-подобна F' (с тем же центром подобия и коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$); это позволяет говорить о центрально-подобных друг другу фигурах.



Черт. 57.

Говорят также, что фигуры F и F' подобны и подобно расположены[1]).

Центрально-подобное преобразование переводит прямую l в прямую l', параллельную l; для построения l' достаточно найти точку A', центрально-подобную какой-либо точке A прямой l, и провести через A' прямую, параллельную l (черт. 58, *а*). Если две прямые l и m пересекаются под углом α,



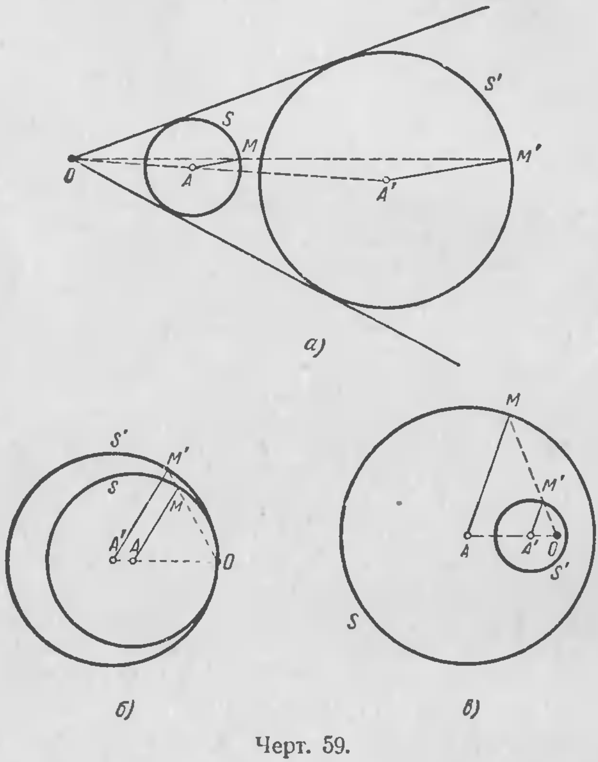
Черт. 58.

то прямые l' и m', центрально-подобные им, пересекаются под тем же углом α; поэтому треугольник $A'B'C'$, центрально-подобный треугольнику ABC, будет иметь те же углы, что и треугольник ABC, т. е. будет ему подобен (черт. 58, *б*). Окружность S с центром A и радиусом r центрально-подобное преобразование переводит в новую окружность S' с центром в точке A', в которую переходит точка A, и радиусом $r' = kr$, где k — коэффициент подобия (черт. 59). Действительно, из подобия треугольников OAM и $OA'M'$ (где M — произвольная точка S, а M' — точка, центрально-подобная M) следует, что $\frac{A'M'}{AM} = k$, т. е. $A'M' = kr$; это и означает, что S переходит в окружность с центром A' и радиусом kr.

Очевидно, что каждые две **неравные** окружности S и S' радиусов r и r' с центрами в точках A и A' можно рассматривать как центрально-подобные; достаточно принять за центр подобия точку O линии центров AA', лежащую **вне**

[1]) Центрально-подобное преобразование является преобразованием подобия в смысле определения, приведённого во введении к этой части книги, поскольку длины всех отрезков умножаются при этом преобразовании на **одно и то же** число k (см. ниже, стр. 90).

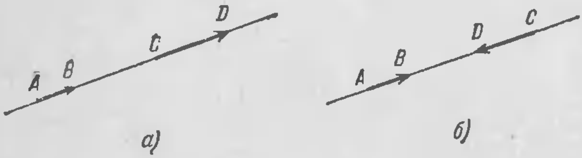
отрезка AA' и такую, что $\frac{OA'}{OA}=\frac{r'}{r}$, а коэффициент подобия k положить равным отношению $\frac{r'}{r}$ (черт. 59). Точка O



Черт. 59.

называется **внешним центром подобия** окружностей S и S' (в отличие от внутреннего центра подобия, о котором речь пойдёт ниже). Для того чтобы построить внешний центр подобия O неравных окружностей S и S', достаточно провести какие-нибудь (какие угодно!) параллельные и одинаково направленные радиусы AM и $A'M'$ этих окружностей и соединить M и M'; O есть точка пересечения AA' и MM'. Если меньшая из окружностей не лежит внутри большей, то внешний центр подобия O можно также найти как точку пересечения общих внешних касательных (черт. 59, *а*); если S и S' внутренне касаются друг друга, то центр подобия совпадает с точкой касания (черт. 59, *б*).

Часто оказывается удобным считать, что отношение двух отрезков AB и CD, расположенных на одной прямой, имеет определённый знак: *отношение* $\frac{AB}{CD}$ *считается положительным в том случае, когда направления отрезков* AB *и* CD (т. е. направления от точки A к точке B и от C к D) *совпадают* (черт. 60, *а*), *и отрицательным, когда эти направления противоположны* (черт. 60, *б*). При этом, оче-



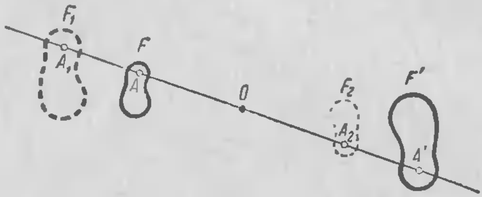
Черт. 60.

видно, существенен порядок, в каком выписываются начало и конец отрезка; так, например, $\frac{BA}{CD} = -\frac{AB}{CD}$. Такое соглашение о знаках отрезков полезно во многих геометрических вопросах; мы будем использовать его в дальнейшем[1]). Если учесть это условие, то коэффициент подобия двух центрально-подобных фигур можно считать как положительным, так и отрицательным. А именно, две фигуры F и F' мы будем называть центрально-подобными с центром подобия O и (отрицатель-

---

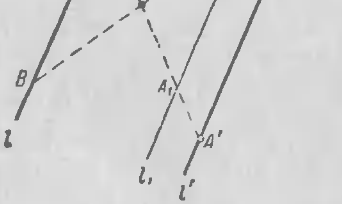
[1]) Это определение знака отношения отрезков можно объяснить следующим образом. Примем на прямой некоторое направление за положительное (его можно указать стрелкой, поставленной на прямой) и будем считать отрезок AB прямой положительным, если его направление (от точки A к точке B) положительно, и отрицательным в противном случае (ср. мелкий шрифт на стр. 24). В таком случае отношение двух отрезков может быть и положительным и отрицательным, причём, как легко видеть, независимо от того, какое направление прямой мы приняли за положительное, отношение $\frac{AB}{CD}$ будет положительным, если отрезки AB и CD направлены в одну сторону (тогда оба отрезка будут положительными или оба будут отрицательными), и отрицательным, если они направлены в разные стороны (тогда один из двух отрезков будет положительным, а второй — отрицательным).

ным!) коэффициентом подобия — k, если любые две соответствующие точки A и A' этих фигур лежат на одной прямой с точкой O по разные стороны от O и отношение длин отрезков OA' и OA равно k (черт. 61); это условие можно записать в виде $\frac{OA'}{OA} = -k$. Центрально-подобное преобразование с центром подобия O и отрицательным коэффициентом



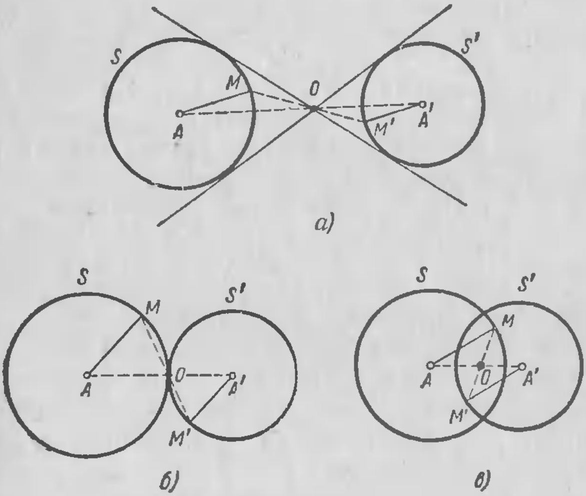
Черт. 61.

подобия — k совпадает с преобразованием, получающимся, если вслед за центрально-подобным преобразованием с центром O и положительным коэффициентом k (переводящим фигуру F в F_1, см. черт. 61) произвести ещё симметрию относительно точки O (переводящую F_1 в F') или если сперва произвести симметрию относительно точки O (при этом фигура F перейдёт в F_2, см. черт. 61), а затем центрально-подобное преобразование с центром O и положительным коэффициентом k (при этом F_2 перейдёт в F'). Таким образом, *центрально-подобное преобразование с отрицательным коэффициентом подобия — k есть сумма центрально-подобного преобразования с тем же центром O и положительным коэффициентом k и симметрии относительно точки O, взятых в любом порядке.* В дальнейшем, говоря о центрально-подобном преобразовании, мы всегда будем считать, что коэффициент подобия может быть как положительным, так и отрицательным.



Черт. 62.

Центрально-подобное преобразование с отрицательным коэффициентом подобия $-k$ тоже переводит прямую l в параллельную ей прямую l' (только теперь центр подобия уже будет лежать между прямыми l и l'; см. черт. 62) и окружность S — в окружность S' (причём центр A' окружности S' центрально-подобен центру A окружности S с отрицательным коэффициентом подобия $-k$, а отношение радиусов $\frac{r'}{r}$ равно k; см. черт. 63). Каждые две окружности S и S'



Черт. 63.

можно рассматривать как центрально-подобные с отрицательным коэффициентом подобия, равным $-\frac{r'}{r}$ (где r и r' — радиусы окружностей), и центром подобия в точке O такой, что она лежит на линии центров AA' и $\frac{OA'}{OA} = -\frac{r'}{r}$. Точка O расположена внутри отрезка AA' и называется внутренним центром подобия окружностей S и S'. Для того чтобы найти внутренний центр подобия O двух окружностей S и S', достаточно провести какие-нибудь (какие угодно!) параллельные и противоположно направленные радиусы AM и $A'M'$ окружностей; O есть точка пересечения AA' и MM' (черт. 63). Если окружности S и S' не пересекаются, то их внутренний центр подобия O можно также найти как точку пересечения общих внутренних касательных (черт. 63, *а*); если S и S' внешне касаются друг друга, то центр O совпадает с точкой касания (черт. 63, *б*). Таким образом, две неравные окружности можно рассматривать как центрально-подобные двумя способами (коэффициент подобия может быть взят равным $\frac{r'}{r}$ или $-\frac{r'}{r}$); две равные окружности центрально-подобны единственным образом (с коэффициентом подобия -1). У концентрических окружностей (и только у них) внешний и внутренний центры подобия совпадают (и совпадают с их общим центром).

Единственной неподвижной точкой центрально-подобного преобразования (отличного от тождественного преобразования, которое можно рассматривать как частный случай центрально-подобного преобразования, отвечающий коэффициенту $k=1$) является центр подобия O; неподвижными прямыми являются все прямые, проходящие через O.

Если коэффициент центрально-подобного преобразования равен -1, то оно совпадает с симметрией относительно центра подобия; таким образом, симметрия относительно точки является частным случаем центрально-подобного преобразования. Исходя из этого, можно обобщить задачи на построение 8—10, в решении которых используется симметрия относительно точки; при этом в решениях более общих задач придётся использовать уже отличное от симметрии центрально-подобное преобразование. Так, в условии задачи 8 можно потребовать, чтобы отрезок искомой прямой, заключённый между прямой l и окружностью S, делился в точке A в заданном отношении $\frac{m}{n}$; в условии задачи 9 а) — чтобы отношение длин хорд, высекаемых окружностями S_1 и S_2 на искомой прямой, имело заданное значение $\frac{m}{n}$; в условии задачи 9 б) — чтобы разность длин хорд, которые высекают окружности S_1 и S_2 на искомой прямой, умноженных на заданные числа m и n, имела данную величину; в условии задачи 10 — чтобы отрезок EF хорды CD делился в точке J в заданном отношении $\frac{m}{n}$. Решения этих новых задач аналогичны решениям задач 8—10; мы предоставляем читателю провести эти решения самостоятельно.

44. Даны две прямые l_1 и l_2 и точка A. Через точку A проведите прямую l, на которой l_1 и l_2 высекают отрезок BC такой, что $AB:AC = m:n$.

45. а) Даны окружность S и точка A на ней. Найдите геометрическое место середин хорд окружности, проходящих через A.

б) Даны окружность S и на ней три точки A, B и C. Проведите хорду AX, которая хордой BC делилась бы пополам.

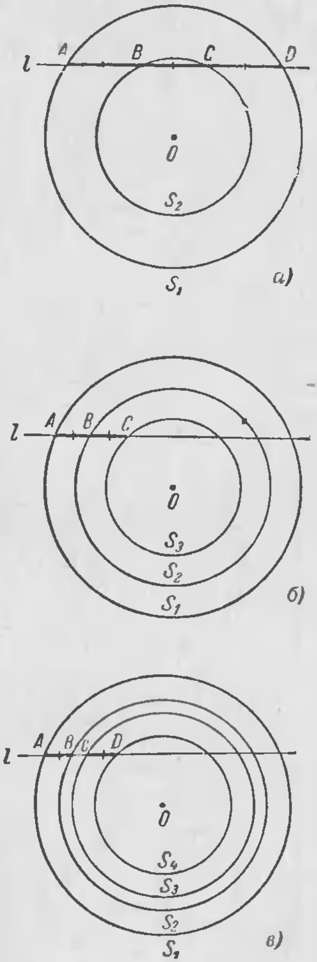
46. а) Даны две концентрические окружности S_1 и S_2. Проведите прямую l, пересекающую эти окружности последовательно в точках A, B, C и D таких, что $AB = BC = CD$ (черт 64, *а*).

б) Даны три концентрические окружности S_1, S_2 и S_3. Проведите прямую l, пересекающую S_1, S_2 и S_3 последовательно в точках A, B и C таких, что $AB = BC$ (черт. 64, *б*).

в) Даны четыре концентрические окружности S_1, S_2, S_3 и S_4. Проведите прямую l, пересекающую S_1, S_2, S_3 и S_4 последовательно в точках A, B, C, D таких, что $AB = CD$ (черт. 64, *в*).

47. а) Впишите в данный треугольник ABC квадрат так, чтобы две вершины его лежали на основании AB, а две другие — на сторонах AC и BC.

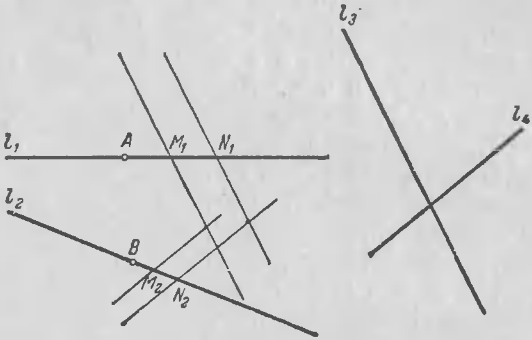
б) Впишите в треугольник ABC треугольник, стороны которого параллельны прямым l_1, l_2 и l_3 (см. сноску на стр. 82).



Черт. 64.

Обобщением задачи 47 б) является задача 48 в).

48. а) Даны прямые l_1 и l_2, точка A на прямой l_1 и точка B на прямой l_2. От точек A и B на прямых l_1 и l_2 откладывают отрезки AM_1 и BM_2, имеющие известное отношение $\frac{AM_1}{BM_2}=m$, и через точки M_1 и M_2 проводят прямые, параллельные двум другим заданным прямым l_3 и l_4 (черт. 65). Найдите геометрическое место точек пересечения проведённых прямых.



Черт. 65.

б) Многоугольник $A_1A_2...A_n$ изменяется так, что его стороны остаются параллельными заданным направлениям, а вершины A_1, A_2, ... , A_{n-1} скользят по заданным прямым l_1, l_2, ... , l_{n-1}. Найдите геометрическое место вершины A_n.

в) Впишите в данный многоугольник другой многоугольник, стороны которого параллельны данным прямым [1]).

Значительным обобщением задачи 48 в) является задача 189 из § 5 гл. I третьей части книги.

49. Постройте окружность S,

а) касающуюся двух данных прямых l_1 и l_2 и проходящую через данную точку A;

б) проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной прямой l;

в) касающуюся двух данных прямых l_1 и l_2 и данной окружности $\overline{S}$.

См. также ниже задачу 56 (стр. 96) и задачи 232 а), б), 237 из § 2, 247 а) из § 3 и 271 из § 5 гл. II третьей части книги.

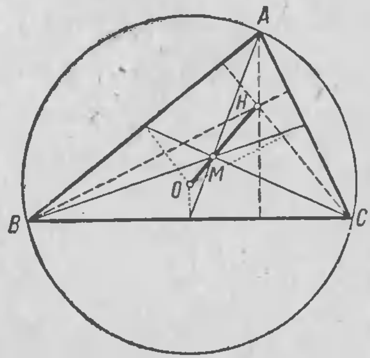
---

[1]) Под многоугольником, вписанным в данный многоугольник, мы понимаем здесь многоугольник, все вершины которого лежат на сторонах данного многоугольника (по одной вершине на каждой стороне) или на их продолжениях.

50. а) Докажите, что точка M пересечения медиан треугольника ABC, центр O описанного круга и точка H пересечения высот лежат на одной прямой, причём $\frac{HM}{MO}=\frac{2}{1}$ (черт. 66, *а*).

[Прямая, на которой лежат точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр описанного круга треугольника, называется **прямой Эйлера.**]

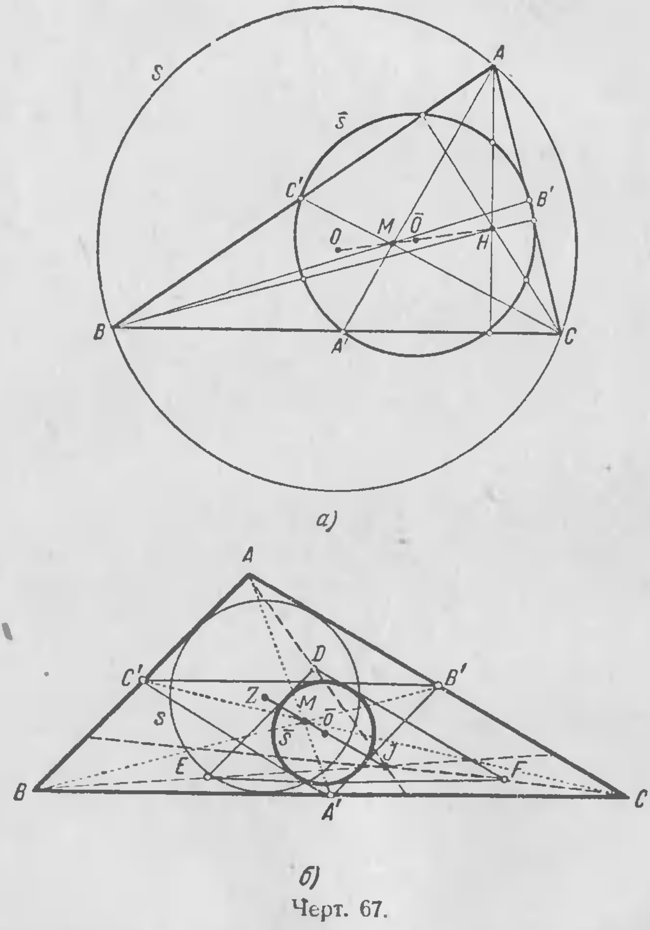
б) Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.



Черт. 66.

в) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке J. Эта точка лежит на одной прямой с точкой M пересечения медиан и центром Z вписанного круга, причём $\frac{JM}{MZ}=\frac{2}{1}$ (черт. 66, *б*).

51. а) Пусть H есть точка пересечения высот треуголь-



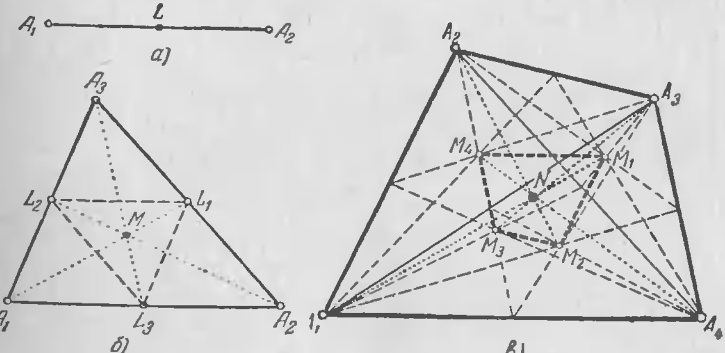
Черт. 67.

ника ABC, M — точка пересечения его медиан. Докажите, что окружность $\bar{S}$, центрально-подобная описанной окружности S с центром подобия H и коэффициентом подобия $^1/_2$, центрально-подобна окружности S с центром подобия M и коэффициентом подобия $-{}^1/_2$. Эта окружность проходит через середины A', B', C' сторон треугольника, основания высот и середины отрезков HA, HB и HC высот (черт. 67, *а*).

[Окружность $\bar{S}$ называется окружностью Эйлера или окружностью девяти точек треугольника.]

б) Пусть J — точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника ABC с точками касания противоположных сторон с вневписанными окружностями (см. задачу 50 в)), M — точка пересечения медиан треугольника. Докажите, что окружность $\bar{s}$, центрально-подобная вписанной окружности s с центром подобия в точке J и коэффициентом подобия $^1/_2$, центрально-подобна s с центром подобия M и коэффициентом подобия $-{}^1/_2$. Эта окружность касается средних линий $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ треугольника ABC и прямых, соединяющих попарно между собой середины D, F и E отрезков JA, JB и JC (черт. 67, *б*).

52. а) Центр тяжести многоугольника. Центром тяжести отрезка называется его середина (черт. 68, *а*). Центры тяжести сторон треугольника образуют треугольник, центрально-подобный исходному с коэффициентом подобия $-{}^1/_2$ и центром подобия в точке пересечения



Черт. 68, *а*—*в*.

медиан, называемой также центром тяжести треугольника (черт. 68, *б*). Докажите, что центры тяжести четырёх треугольников, вершины которых совпадают с вершинами произвольного четырёхугольника, образуют четырёхугольник, центрально-подобный исходному с коэффициентом подобия — $^1/_3$; соответствующий центр подобия N (см. черт. 68, *в*) называется центром тяжести четырёхугольника. Аналогично центры тяжести пяти четырёхугольников, вершины которых совпадают с вершинами произвольного пятиугольника, образуют пятиугольник, центрально-подобный исходному с коэффициентом подобия — $^1/_4$ и центром подобия в некоторой точке, называемой центром тяжести пятиугольника; центры тяжести шести пятиугольников, вершины которых совпадают с вершинами произвольного шестиугольника, образуют шестиугольник, центрально-подобный исходному с коэффициентом подобия — $^1/_5$ и центром подобия в некоторой точке, называемой центром тяжести шестиугольника, и т. д.[1]).

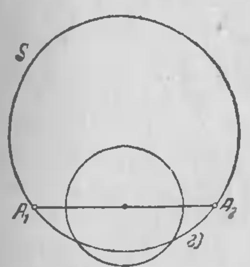
[Другими словами, три прямые, соединяющие вершины треугольника с центрами тяжести противоположных сторон, пересекаются в одной точке — центре тяжести треугольника — и делятся в ней в отношении 2:1; четыре прямые, соединяющие каждую из вершин четырёхугольника с центром тяжести треугольника, образованного тремя другими вершинами четырёхугольника, пересекаются в одной точке — центре тяжести четырёхугольника — и делятся в ней в отношении 3:1 и т. д.]

б) Окружность Эйлера вписанного в круг многоугольника. Окружностью Эйлера хорды круга S радиуса R можно назвать окружность радиуса $\frac{R}{2}$ с центром в середине хорды (черт 68, *г*). Центры трёх окружностей Эйлера трёх сторон треугольника (вписанного в круг радиуса R) лежат на одной окружности радиуса $\frac{R}{2}$ (с центром в точке пересечения этих трёх окружностей), называемой окружностью Эйлера треугольника (ср. черт. 68, *д* с черт. 67, *а*). Докажите, что центры четырёх окружностей Эйлера четырёх треугольников, вершины которых совпадают с вершинами произвольного четырёхугольника, вписанного

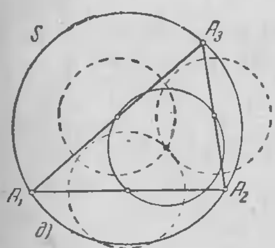
---

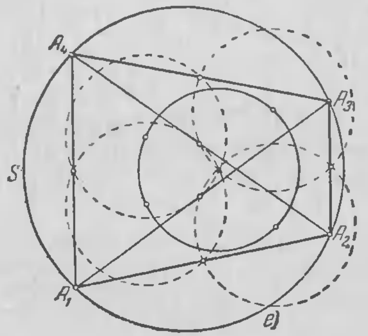
[1]) Нетрудно показать, что определённый здесь центр тяжести n-угольника совпадает с механическим центром тяжести n равных масс, расположенных в его вершинах.

в круг S радиуса R, лежат на одной окружности радиуса $\frac{R}{2}$ (с центром в точке пересечения этих четырёх окружностей);



эта окружность называется **окружностью Эйлера четырёхугольника** (черт. 68, *е*). Аналогично центры окружностей Эйлера пяти четырёхугольников, вершины которых совпадают с вершинами произвольного пятиугольника, впи-





Черт. 68, *г—е*.

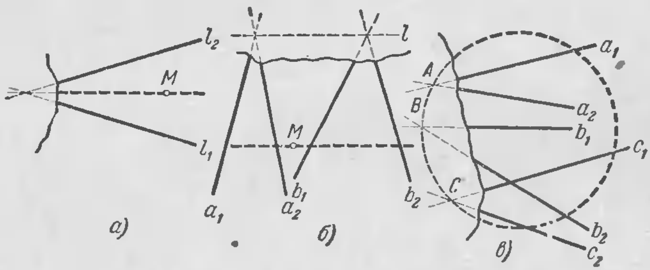
санного в круг S радиуса R, лежат на одной окружности радиуса $\frac{R}{2}$ (с центром в точке пересечения этих пяти окружностей), называемой **окружностью Эйлера пятиугольника**, и т. д.

в) Докажите, что центр тяжести вписанного в круг n-угольника (см. задачу а)) лежит на отрезке, соединяющем центр описанной окружности с центром окружности Эйлера (см. задачу б)), и делит этот отрезок в отношении $2:(n-2)$.

С помощью центрально-подобных преобразований удобно решать **задачи на построение на ограниченном куске плоскости**. Обычно при решении задач на построение предполагают, что плоскость является **неограниченной**; так, например, считают, что каждую прямую можно неограниченно продолжать в обе стороны. Фактическое же построение всегда проводится в строго ограниченной области — на листе бумаги или на классной доске. Поэтому при выполнении построения может, например, случиться, что точка пересечения двух известных прямых, участвующих в построении, находится за пределами чертежа, т. е. нам недоступна. Это обстоятельство вызвало появление задач, в которых специально оговаривается, что построения можно производить лишь в некоторой ограниченной части плоскости[1]). Применение центрально-подобного преобразования позволяет установить тот замечательный факт, что **все** построения, выполнимые на неограниченной плоскости, можно произвести и на любом (сколь угодно малом!) её куске (см. ниже, задачу 54).

53. а) Соедините данную точку M с «недоступной» точкой пересечения данных прямых l_1 и l_2 (или прямой l и окружности S, или двух окружностей S_1 и S_2) (черт. 69, *а*).

б) Проведите через данную точку M прямую, параллельную «недоступной» прямой l, две точки которой определены



Черт. 69.

парами прямых a_1, a_2 и b_1, b_2, пересекающимися в этих точках (черт. 69, *б*).

в) Проведите окружность через три «недоступные» точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, каждая из которых определяется парой проходящих через эту точку прямых a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2 (черт. 69, *в*; разумеется, в этой задаче

[1]) Заметим, что в **геометрии** обыкновенно не настаивают на фактическом выполнении чертежа в каждой задаче на построение: задача считается решённой, если правильно указан ход её решения (т. е. если построение произведено «с помощью языка», по выражению немец-

требуется построить лишь часть окружности, проходящую по доступной нам части плоскости, или определить её центр и радиус).

См. также ниже задачи 119 а), б), 120 из § 2 гл. I третьей части книги.

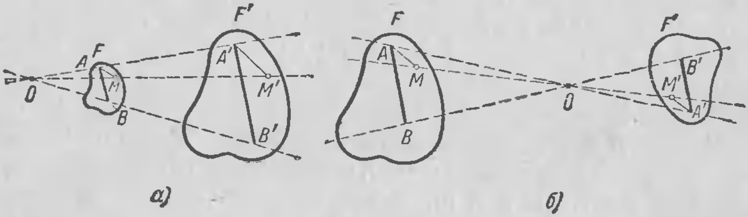
54. Докажите, что при любом расположении заданных точек на ограниченном куске $\mathcal{K}$ плоскости или даже вне его и при любой величине данных отрезков каждая задача на построение, которую можно решить на всей плоскости, может быть решена и при помощи построений, не выходящих за пределы $\mathcal{K}$. [При этом, если точка A, которая задана или которую надо построить, находится за пределами области $\mathcal{K}$, то она определяется двумя прямыми этой области, пересекающимися в A; недоступная прямая определяется двумя своими точками, а недоступная окружность — центром и одной точкой или центром и радиусом.]

Пусть F и F' — две центрально-подобные фигуры (положительный или отрицательный!), коэффициент подобия которых равен k (черт. 70, *а* и *б*). В таком случае соответствующие друг другу отрезки этих фигур параллельны, направлены в одну сторону (соответственно в разные стороны) и имеют постоянное отношение k; это следует из того, что треугольники OAB и $OA'B'$ подобны $\left(\text{так как } \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \pm k\right)$. Условимся считать отношение двух параллельных отрезков AB и $A'B'$ положительным или отрицательным в зависимости от

кого геометра Я. Штейнера). Поэтому ограниченность чертежа не является реальной преградой для решения задач на построение, и построения на ограниченном куске плоскости следует рассматривать лишь как один из типов задач, в формулировке которых специально оговариваются некоторые условия, ограничивающие возможности построения (аналогично построениям, в которых запрещается пользоваться линейкой или циркулем; об этих построениях см. третью часть книги). В противоположность этому в черчении вопрос о построениях на ограниченном куске плоскости является практически важным. Также и в геодезии — науке о построениях на местности и съёмке планов — подобные построения имеют серьёзное практическое значение (здесь область допустимых построений может быть ограничена рекой, морем, горой, лесом, болотом и т. д.).

того, совпадают ли направления обоих отрезков (от A к B и от A' к B') или противоположны; это условие аналогично тому, которое мы ввели выше для отношения отрезков одной прямой. Тогда можно сказать, что во всех случаях *соответствующие отрезки двух центрально-подобных фигур параллельны и имеют постоянное отношение, равное коэффициенту подобия.* Покажем, что и обратно, *если каждой точке фигуры F можно сопоставить некоторую точку фигуры F' так, чтобы соответствующие отрезки этих фигур были параллельны и имели постоянное* (по величине и по знаку!) *отношение* k, не равное 1, *то фигуры F и F' центрально-подобны.*

Действительно, возьмём какую-нибудь точку M фигуры F и соответствующую ей точку M' фигуры F'; пусть A и A' —



Черт. 70.

любые другие соответствующие друг другу точки этих же фигур, O — точка пересечения прямых MM' и AA' (см. черт. 70). Так как $MA \| M'A'$, то треугольники OMA и $OM'A'$ подобны; так как по условию $\frac{M'A'}{MA} = k$, то $\frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OA} = k$. Отсюда вытекает, во-первых, что точка O не зависит от выбора пары точек A, A' $\left(\text{это такая точка прямой } MM', \text{ что } \frac{OM'}{OM} = k\right)$ и, во-вторых, что любые соответствующие друг другу точки A и A' фигур F и F' центрально-подобны с центром подобия O и коэффициентом подобия k, т. е. то, что нам и требовалось доказать. Если бы отношение k соответствующих отрезков фигур F и F' равнялось $+1$, то наше рассуждение было бы неверным, ибо в этом случае прямые MM' и AA' не пересекались (они были бы параллельны); в этом случае фигуры F и F' уже не центрально-подобны, а получаются одна из другой параллельным переносом (см. выше, стр. 22—23).

Перейдём к вопросу о сложении центрально-подобных преобразований. Пусть фигура F_1 центрально-подобна фигуре F с центром подобия O_1 и коэффициентом подобия k_1; фигура F' центрально-подобна фигуре F_1 с центром подобия O_2 и коэффициентом подобия k_2 (см. черт. 71, где для простоты изображён случай положительных k_1 и k_2; на самом деле во всех последующих рассуждениях k_1 и k_2 можно считать как положительными, так и отрицательными). В таком случае соответствующие отрезки фигур F и F_1 параллельны и имеют постоянное отношение k_1; соответствующие отрезки фигур F_1 и F' параллельны и имеют отношение k_2. Отсюда вытекает, что соответствующие отрезки фигур F' и F параллельны и имеют постоянное отношение k_1k_2 $\left(\text{перемножив равенства } \frac{A_1B_1}{AB}=k_1\right.$ и $\left.\frac{A'B'}{A_1B_1}=k_2, \text{ мы получим } \frac{A'B'}{AB}=k_1k_2\right)$. Но это означает, что фигура F' центрально-подобна фигуре F с коэффициентом подобия k_1k_2, если $k_1k_2\neq 1$, и получается из F с помощью параллельного переноса, если $k_1k_2=1$. Иначе это можно выразить так: *сумма двух центрально-подобных преобразований с коэффициентами k_1 и k_2 есть центрально-подобное преобразование с коэффициентом k_1k_2, если $k_1k_2\neq 1$, и параллельный перенос, если $k_1k_2=1$* [1]).

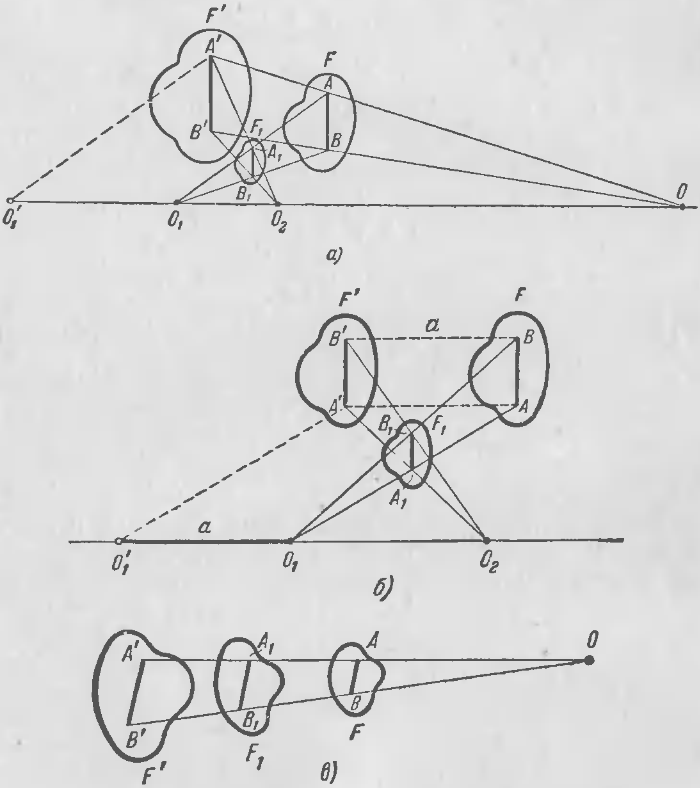
Покажем теперь, как, зная центры O_1 и O_2 и коэффициенты k_1 и k_2 двух центрально-подобных преобразований, найти центр O центрально-подобного преобразования, являющегося их суммой (или — в случае, когда $k_1k_2=1$,— как найти величину и направление получающегося в сумме параллельного переноса). Ясно, что если O_1 совпадает с O_2, то и O совпадает с той же точкой (черт. 71, *в*); поэтому

---

[1]) Вот ещё одна формулировка того же самого предложения: *две фигуры F и F', порознь центрально-подобные одной и той же третьей фигуре F_1, либо центрально-подобны между собой, либо получаются одна из другой параллельным переносом.*

Рекомендуем читателю попытаться также самостоятельно доказать теорему о сложении центрально-подобных преобразований, исходя лишь из определения центрально-подобных преобразований и не используя того, что каждые две фигуры плоскости, соответствующие отрезки которых параллельны и имеют постоянное отношение, центрально-подобны между собой.

в дальнейшем мы будем считать центры O_1 и O_2 различными. Первое центрально-подобное преобразование оставляет центр O_1 на месте, а второе переводит O_1 в точку O_1' прямой O_2O_1 такую, что $\frac{O_2O_1'}{O_2O_1}=k_2$ (черт. 71, *а*, *б*).



Черт. 71.

Таким образом, сумма двух преобразований переводит точку O_1 в точку O_1'. Отсюда следует что *если* $k_1k_2=1$ (черт. 71, *б*), *то сумма двух преобразований есть параллельный перенос в направлении прямой* O_1O_1' (т. е. *в направлении прямой* O_2O_1, поскольку O_1' лежит на прямой O_1O_2) *на* *расстояние* $a = O_1O_1'$; так как $\frac{O_2O_1'}{O_2O_1} = k_2$, то a можно ещё представить так[1]):

$$a = O_2O_1' - O_2O_1 = \frac{O_2O_1' - O_2O_1}{O_2O_1} O_2O_1 = (k_2 - 1)\, O_2O_1.$$

Если же $k_1k_2 \neq 1$ (черт. 71, *а*), *то искомый центр* O *лежит на прямой* O_1O_1', т. е. *на прямой* O_1O_2, *причём* $\frac{OO_1'}{OO_1} = k_1k_2$. Можно найти и более удобное выражение, определяющее положение точки O. Из соотношений $\frac{O_2O_1'}{O_2O_1} = k_2$ и $\frac{OO_1'}{OO_1} = k_1k_2$ следует, что[1])

$$\frac{O_1O_1'}{O_2O_1} = \frac{O_2O_1' - O_2O_1}{O_2O_1} = k_2 - 1 \text{ и } \frac{O_1O_1'}{OO_1} = \frac{OO_1' - OO_1}{OO_1} = k_1k_2 - 1;$$

разделив первое из этих равенств на второе, получим $\frac{OO_1}{O_2O_1} = \frac{k_2 - 1}{k_1k_2 - 1}$, или окончательно

$$OO_1 = \frac{k_2 - 1}{k_1k_2 - 1} O_2O_1.$$

Заметим, что попутно мы доказали следующую важную теорему[2]):

Теорема о трёх центрах подобия. *Пусть фигура* F_1 *центрально-подобна фигуре* F *с центром подобия* O_1 *и центрально-подобна другой фигуре* F' *с центром подобия* O_2. *Если* O_1 *не совпадает с* O_2, *то прямая* O_1O_2 *проходит через центр подобия* O *фигур* F *и* F' (черт. 71, *а*) *или параллельна направлению параллельного переноса, переводящего* F *в* F' (черт. 71, *б*). *Если* O_1 *совпадает с* O_2, *то эта точка является также центром подобия центрально-подобных фигур* F *и* F' (черт. 71, *в*).

---

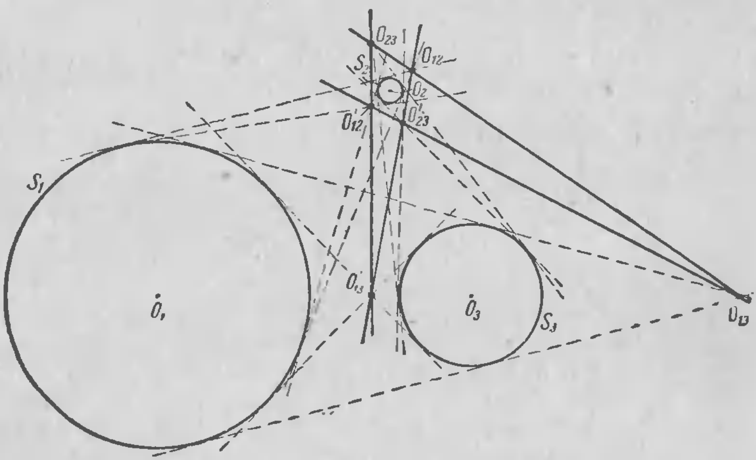
[1]) Для того чтобы сделать это рассуждение независимым от знаков и от величин коэффициентов подобия k_1 и k_2, следует всюду рассматривать направленные отрезки (см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 24—25).

[2]) Совсем другое доказательство этой теоремы намечено в последнем параграфе гл. II третьей части книги.

Если O_1 отлична от O_2, то прямую O_1O_2 называют **осью подобия** трёх фигур F, F_1 и F'; если O_1 совпадает с O_2, то эту точку называют **центром подобия** фигур F, F_1 и F'.

Обычно теорему о трёх центрах подобия формулируют не совсем точно в виде следующего утверждения: *три центра подобия трёх попарно центрально-подобных фигур лежат на одной прямой* [1]).

В качестве примера рассмотрим три окружности S_1, S_2 и S_3. В общем случае, когда никакие две из них не равны, каждая пара окружностей имеет два центра подобия — внешний и внутренний, так что всего имеется шесть попарных центров подобия, которые лежат по три на четырёх осях подобия (черт. 72). Если две окружности равны, то они не имеют



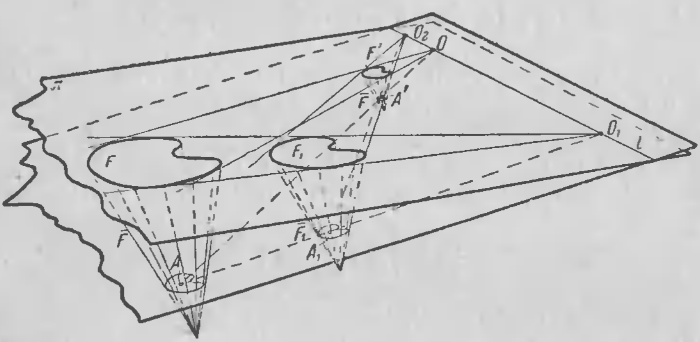
Черт. 72.

внешнего центра подобия, так что всего имеется 5 попарных центров подобия, также лежащих на четырёх осях подобия; если все три окружности равны между собой, то они имеют всего три попарных центра подобия и три оси подобия. При

[1]) Случай, когда все центры подобия совпадают, тоже охватывается этой формулировкой. Сформулированное утверждение верно во всех случаях, когда существуют три центра подобия; неточность, о которой говорится в тексте, заключается в том, что здесь исключается из рассмотрения случай, когда две из трёх фигур F, F_1 и F' равны (получаются одна из другой параллельным переносом). См. по этому поводу § 2 гл. I третьей части книги.

этом лишь в том случае, если центры трёх окружностей не лежат на одной прямой, все оси подобия являются различными; в противном случае все оси подобия совпадают, причём может оказаться, что три из центров подобия совпадают, так что одна из четырёх осей подобия трёх окружностей заменяется центром подобия[1]).

Отметим ещё изящное стереометрическое доказательство теоремы о трёх центрах подобия. Обозначим плоскость, в которой лежат фигуры F, F_1 и F', буквой π. Дополним фигуры F, F_1 и F' до пространственных фигур $\overline{F}$, $\overline{F}_1$ и $\overline{F'}$, попарно центрально-подобных с теми же центрами подобия O_1, O_2 и O (черт. 73[2]); если фигура F'



Черт. 73.

не центрально-подобна F, а получается из F параллельным переносом, то $\overline{F'}$ получается из $\overline{F}$ тем же самым параллельным переносом). Пусть A — произвольная точка фигуры $\overline{F}$, не лежащая в плоскости π, а A_1 и A' — соответствующие ей точки фигур $\overline{F}_1$ и $\overline{F'}$. В таком случае прямая A_1A проходит через O_1, прямая A_1A' проходит через O_2 и прямая AA' проходит через O (или параллельна направлению параллельного переноса, переводящего F в F'). Поэтому если O_1 и O_2 совпадают, то прямые A_1A и $A'A_1$ тоже совпадают; следовательно, и прямая AA' совпадает с AA_1 и A_1A', и значит, точка O, в которой она пересекает плоскость π, совпадает с O_1 и O_2. Если же O_1 и O_2 не сов-

[1]) Рекомендуем читателю самостоятельно сделать чертежи, относящиеся ко всем возможным случаям.

[2]) Определение и свойства центрально-подобного преобразования (гомотетии) в пространстве аналогичны определению и свойствам центрально-подобного преобразования на плоскости. См. по этому поводу книги Д. И. Перепёлкина и Ж. Адамара, цитированные в подстрочном примечании на стр. 11.

падают, то плоскость, проходящая через A, A_1 и A', пересекает плоскость π по прямой l, которая проходит через все три центра подобия O_1, O_2 и O, или проходит через O_1 и O_2 и параллельна направлению параллельного переноса, переводящего F в F'.

55. Пусть окружность S касается окружностей S_1 и S_2. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через центр подобия S_1 и S_2 (внешний, если S касается S_1 и S_2 одноимённо, т. е. обеих внешне или обеих внутренне; внутренний в противном случае).

В другой связи эта задача приведена в § 1 гл. II третьей части книги (см. задачу 212).

56. Выведите из теоремы о трёх центрах подобия новое решение задачи 49 в) (стр. 82).

57. Пусть M, N и P — три точки на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC (или на их продолжениях). Докажите, что

а) для того чтобы точки M, N и P лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

(теорема Менелая)[1]);

б) для того чтобы прямые CM, AN и BP пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1$$

(теорема Чева)[1]).

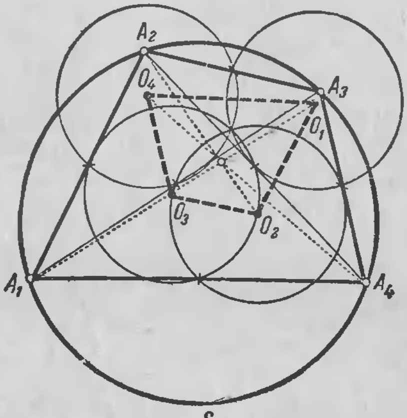
В другой связи теоремы Менелая и Чева приведены в § 2 гл. I третьей части книги (см. задачи 134 а), б)); там же указаны многочисленные применения этих важных теорем.

---

[1]) Другими словами, в условии задачи 57 а) требуется доказать следующие две теоремы: 1) если точки M, N и P лежат на одной прямой, то $\frac{AM}{BM}\frac{BN}{CN}\frac{CP}{AP}=1$ (необходимость условия задачи), и 2) если $\frac{AM}{BM}\frac{BN}{CN}\frac{CP}{AP}=1$, то точки M, N и P лежат на одной прямой (достаточность условия); аналогичный смысл имеет и задача 57 б). Относительно знака отношения отрезков, лежащих на одной прямой, см. выше, стр. 77.

58. а) Выведите из предложений задач 52 а) и 50 а) новое решение задачи 33 а) из § 1 гл. II первой части (стр. 47).

б) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — четыре точки, расположенные на окружности S; O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей Эйлера (см. выше задачу 51 а)) треугольников $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$. Докажите, что четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ центрально-подобен четырёхугольнику $A_1A_2A_3A_4$ с коэффициентом подобия $-\frac{1}{2}$ (черт. 74).



Черт. 74.

[Другими словами, если точки A_1, A_2, A_3 и A_4 расположены на одной окружности, то четыре отрезка, соединяющих каждую из этих точек с центром окружности Эйлера треугольника, образованного тремя другими, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении $2:1$.]

59. Пусть A_1, A_2, A_3 и A_4 — точки, расположенные на окружности S; H_4, H_3, H_2 и H_1 — точки пересечения высот треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$. Восемь точек A_1, A_2, A_3, A_4, H_1, H_2, H_3 и H_4 определяют 32 треугольника, вершинами которых являются тройки точек, имеющих различные номера (к числу таких треугольников относятся, например, $\triangle A_1A_2A_4$ или $\triangle A_1H_2A_4$, но не $\triangle A_1A_3H_3$, поскольку точки A_3 и H_3 имеют одинаковый номер). Для каждого из этих треугольников можно построить окружность Эйлера (см. задачу 51 а)). Докажите, что

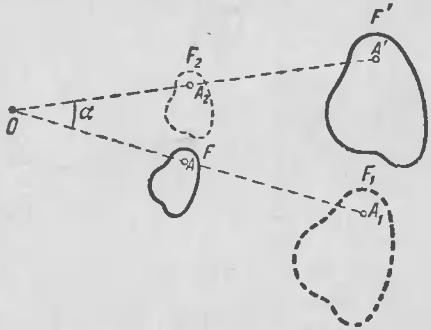
а) из этих 32 окружностей имеется только восемь различных;

б) эти восемь окружностей равны между собой и пересекаются в одной точке;

в) их можно разбить на две группы такие, что центры четырёх окружностей, входящих в одну группу, центрально-подобны четвёрке точек A_1, A_2, A_3, A_4 с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ и четвёрке точек H_1, H_2, H_3, H_4 с коэффициентом подобия $-\frac{1}{2}$.

§ 2. Центрально-подобное вращение и центрально-подобная симметрия. Собственно-подобные и центрально-подобные фигуры

Пусть F_1 — фигура, центрально-подобная фигуре F относительно центра O с положительным коэффициентом подобия k. Повернём фигуру F_1 на угол α около точки O в положение F' (черт. 75). Преобразование, переводящее фигуру



Черт. 75.

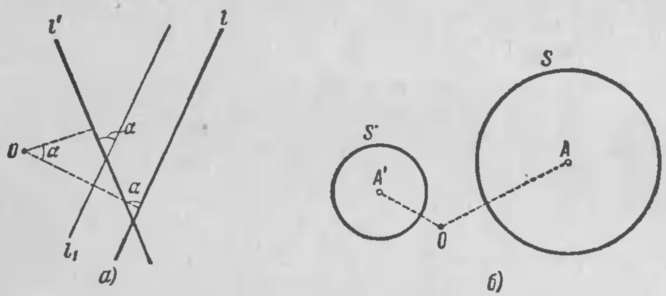
F в фигуру F', называется центрально-подобным вращением[1]). Таким образом, центрально-подобное вращение характеризуется двумя величинами: коэффициентом подобия k и углом поворота α. Точка O называется центром центрально-подобного вращения.

Центрально-подобное вращение можно осуществить также и иначе: сначала повернуть фигуру F вокруг центра O на угол α в положение F_2, а затем произвести центрально-подобное преобразование с центром подобия O и коэффициентом подобия k, переводящее F_2 в F'. Другими словами, *централь-*

[1]) Это преобразование иногда называют также поворотным растяжением (такое название принято, например, в математической кристаллографии).

но-подобное вращение с центром O, углом поворота α и коэффициентом подобия k есть сумма центрально-подобного преобразования с центром подобия O и коэффициентом подобия k и вращения вокруг O на угол α, взятых в любом порядке[1]). Отсюда следует, что если F' получается из F при помощи центрально-подобного вращения с центром O, углом поворота α и коэффициентом подобия k, то и, обратно, фигуру F можно получить из F' при помощи центрально-подобного вращения $\left(\text{с тем же центром } O, \text{ углом поворота } 360^\circ - \alpha \text{ и коэффициентом подобия } \frac{1}{k}\right)$; поэтому можно говорить о фигурах, получающихся центрально-подобным вращением друг из друга.

Центрально-подобное вращение переводит каждую прямую l в новую прямую l' (черт. 76, *а*). Для того чтобы построить



Черт. 76.

прямую l', следует сначала построить прямую l_1, центрально-подобную прямой l, с центром подобия O и коэффициентом подобия k, а затем повернуть прямую l_1 вокруг O на угол α в положение l'. Прямые l и l' образуют между собой угол α; это следует из того, что прямые l и l_1 параллельны, а прямые l_1 и l' образуют угол α (см. выше, стр. 33). Окружность S переводится центрально-подобным вращением в новую окружность S' (черт. 76, *б*); центром окружности S' служит точка A', в которую переводит центрально-подобное вращение центр A

---

[1]) Отсюда вытекает, что центрально-подобное вращение является преобразованием подобия в смысле определения, приведённого на стр. 72 введения к этой части книги (ибо центрально-подобное преобразование есть преобразование подобия, а вращение есть движение).

окружности S, а радиус r' равен kr, где r — радиус S, а k — коэффициент подобия.

Вращение вокруг точки является частным случаем центрально-подобного вращения (соответствующим коэффициенту подобия $k=1$). Исходя из этого, можно обобщить некоторые из приведённых выше задач, в решении которых используется вращение; при этом в решении более общих задач придётся использовать не вращение, а центрально-подобное вращение. Так, в условии задачи 16 из § 2 гл. I первой части можно заменить равносторонний треугольник треугольником, подобным произвольно заданному треугольнику; в условии задачи 18 можно потребовать, чтобы хорды, которые высекают окружности S_1 и S_2 на искомых прямых l_1 и l_2, имели произвольно заданное отношение. Решения этих обобщений задач 16 и 18 аналогичны решениям исходных задач; предоставляем читателям провести их самостоятельно.

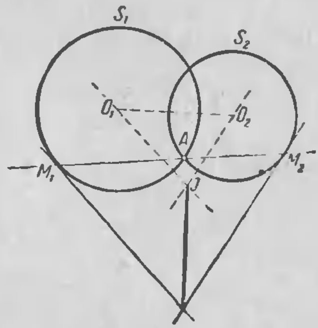
Другим частным случаем центрально-подобного вращения является центрально-подобное преобразование (центрально-подобное преобразование с коэффициентом k есть центрально-подобное вращение с углом поворота $\alpha=0°$, если $k>0$, и с углом поворота $\alpha=180°$, если $k<0$). Соответственно этому можно обобщить некоторые из задач § 1 этой главы; при этом в решениях новых задач придётся использовать не центрально-подобное преобразование, а центрально-подобное вращение. Так, например, в условии задачи 44 можно искать точки B и C такие, чтобы отрезки AB и AC принадлежали не одной прямой l, а двум прямым l и m, проходящим через точку A и образующим известный угол α (см. также ниже задачу 63 — обобщение задачи 49 в) из § 1).

Единственной **неподвижной точкой** центрально-подобного вращения (отличного от тождественного преобразования, которое можно считать центрально-подобным вращением с углом поворота $0°$ и коэффициентом подобия 1) является центр подобия O. **Неподвижных прямых** центрально-подобное вращение, не являющееся центрально-подобным преобразованием (т. е. центрально-подобное вращение с углом поворота, отличным от $0°$ и от $180°$), не имеет вовсе.

60. а) В данный треугольник ABC впишите треугольник PXY (точка P задана на стороне AB), подобный заданному треугольнику LMN.

б) В данный параллелограмм $ABCD$ впишите параллелограмм, подобный заданному параллелограмму $KLMN$.

61. Через точку пересечения A двух окружностей S_1 и S_2 проводят произвольную прямую, пересекающую второй раз окружности в точках M_1 и M_2; затем через центры O_1 и O_2 окружностей проводят прямые O_1J и O_2J, параллельные касательным M_1N и M_2N к окружностям в точках M_1 и M_2 (черт. 77). Докажите, что прямая JN проходит через одну и ту же точку и отрезок JN имеет постоянную длину (независимо от выбора прямой M_1AM_2).



Черт. 77.

62. а) Постройте четырёхугольник $ABCD$, который можно вписать в окружность, если заданы длины его сторон $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$.

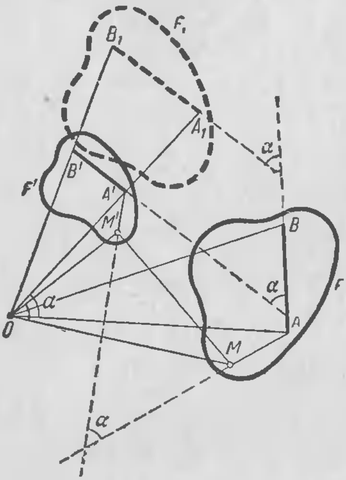
б) Постройте четырёхугольник $ABCD$, зная сумму противоположных углов B и D и длины всех его сторон $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$.

Задача а) представляет собой частный случай задачи б).

63. Постройте окружность S, касающуюся двух данных прямых l_1 и l_2 и пересекающую данную окружность $\bar{S}$ под известным углом α. [*Углом между двумя окружностями* называется угол между касательными к этим окружностям, проведёнными в точке пересечения. Угол между касающимися окружностями равен нулю; окружности, не имеющие общих точек, не образуют никакого угла.]

Пусть фигура F' получается из фигуры F при помощи центрально-подобного вращения с углом поворота α и коэффициентом подобия k (черт. 78) и пусть AB и $A'B'$ — какие-то два соответствующих друг другу отрезка этих фигур. В таком случае $\frac{A'B'}{AB}=k$ (ибо на черт. 78, где F_1 получается из F вращением на угол α, а F' из F_1 — центрально-подобным преобразованием с коэффициентом k, $A_1B_1=AB$; $\frac{A'B'}{AB}=k$)

и угол между отрезками $A'B'$ и AB равен α (ибо угол между AB и A_1B_1 равен α, а $A'B' \parallel A_1B_1$). Следовательно, *соответствующие отрезки фигур F' и F имеют постоянное отношение k и образуют между собой постоянный угол α*. Докажем теперь, что и обратно, *если каждой точке фигуры F можно сопоставить некоторую точку фигуры F' так, что соответствующие отрезки этих фигур будут иметь постоянное отношение k и образовывать между собой постоянный угол α* (причём отрезки фигуры F становятся параллельными соответствующим отрезкам фигуры F' при повороте на угол α в определённом направлении), *то фигуры F и F' получаются одна из другой при помощи центрально-подобного вращения*. Действительно, пусть M и M'—какие-то две соответствующие друг другу точки фигур F и F' (черт. 78). Построим на отрезке MM' треугольник $MM'O$ такой, что $\dfrac{OM'}{OM} = k$ и $\angle MOM' = \alpha$ (если $\alpha > 180°$, то строим треугольник с $\angle MOM' = 360° - \alpha$)[1].



Черт. 78.

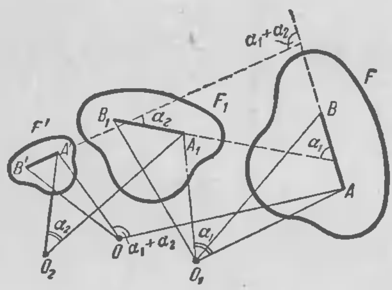
---

[1]) Предварительно надо построить в стороне какой-либо треугольник T с углом при вершине α и отношением боковых сторон k. Так как T подобен MOM', то тем самым определятся углы при основании MM' треугольника MOM'.

Треугольник $MM'O$ строится по такую сторону от отрезка MM', чтобы направление вращения на угол α, переводящего прямую OM в прямую OM', совпадало с направлением вращения на угол α, делающего отрезки фигуры F параллельными соответствующим отрезкам фигуры F'.

Точку O можно также найти как пересечение дуги окружности, стягиваемой хордой MM' и вмещающей угол α, и второй окружности—геометрического места точек, отношение расстояний от которых до точек M и M' равно k (см., например, книги: Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, стр. 115, М., Учпедгиз, 1948 и Д. И. Перепёлкин, Курс элементарной геометрии, ч. 1, стр. 170 и 265, М.—Л., Гостехиздат, 1948 или задачу 257 из § 4 гл. II третьей части книги).

Центрально-подобное вращение с центром O, углом поворота α и коэффициентом подобия k переводит точку M в точку M'; докажем, что оно переводит л ю б у ю точку A фигуры F в соответствующую ей точку A' фигуры F'. Рассмотрим треугольники OMA и $OM'A'$. В этих треугольниках $\frac{OM'}{OM}=\frac{M'A'}{MA}$ $\left(\text{так как } \frac{OM'}{OM}=k \text{ по построению и } \frac{M'A'}{MA}=k \text{ по условию}\right)$ и $\angle OMA=\angle OM'A'$ (ибо угол между OM и OM' равен α по построению, угол между MA и $M'A'$ равен α по условию; ср. выше, стр. 35); поэтому они подобны. Отсюда следует, что $\frac{OA'}{OA}=k$; кроме того, $\angle AOA'=\angle MOM'=\alpha$ (ибо $\angle AOM=\angle A'OM'$). Но это и означает, что наше центрально-подобное вращение переводит точку A в точку A'.



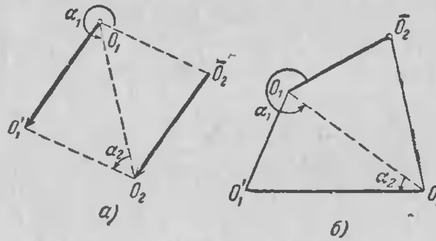
Черт. 79.

Теперь легко ответить на вопрос о том, что представляет собой с у м м а двух центрально-подобных вращений. Пусть фигура F_1 получается из фигуры F при помощи центрально-подобного вращения с центром O_1, коэффициентом подобия k_1 и углом поворота α_1 [1]), а фигура F' получается из фигуры F_1 при помощи центрально-подобного вращения с центром O_2, коэффициентом подобия k_2 и углом поворота α_2; AB, A_1B_1 и $A'B'$ — какие-то соответствующие друг другу отрезки этих трёх фигур (черт. 79). В таком случае $\frac{A_1B_1}{AB}=k_1$ и отрезки AB и A_1B_1 образуют между собой угол α_1; $\frac{A'B'}{A_1B_1}=k_2$ и отрезки A_1B_1 и $A'B'$ образуют между собой угол α_2. Следовательно, $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A_1B_1}{AB}\cdot\frac{A'B'}{A_1B_1}=k_1k_2$ и отрезки AB и $A'B'$ образуют между собой угол $\alpha_1+\alpha_2$ (см. сноску на стр. 34). Таким образом, соответствующие друг другу отрезки фигур F

[1]) Здесь и далее углы поворота всё время отсчитываются в одном определённом направлении (например, против часовой стрелки).

и F' имеют постоянное отношение k_1k_2 и образуют между собой постоянный угол $\alpha_1+\alpha_2$. В силу доказанного выше это означает, что фигура F' получается из F при помощи центрально-подобного вращения с углом поворота $\alpha_1+\alpha_2$ и коэффициентом подобия k_1k_2 или — если $\alpha_1+\alpha_2=360°$, $k_1k_2=1$ — при помощи параллельного переноса. Итак, *сумма двух центрально-подобных вращений с коэффициентами подобия k_1 и k_2 и углами поворота α_1 и α_2 есть новое центрально-подобное вращение с коэффициентом подобия k_1k_2 и углом поворота $\alpha_1+\alpha_2$; в исключительном случае, когда $k_1k_2=1$ и $\alpha_1+\alpha_2=360°$* [1], *сумма двух центрально-подобных вращений есть параллельный перенос* [2].

Найдём теперь центр O центрально-подобного вращения (или направление и величину параллельного переноса), представляющего собой сумму двух данных центрально-подобных вращений. Если центры O_1 и O_2 этих вращений совпадают, то, очевидно, O совпадает с той же точкой. Предположим теперь, что O_1 не совпадает с O_2. Сумма двух рассматриваемых центрально-подобных вращений переводит O_1 в точку



Черт. 80.

O_1', в которую переводит O_1 одно второе вращение (ибо первое вращение оставляет O_1 на месте); точку O_1' нетрудно построить. Эта же сумма переводит в O_2 точку $\bar{O}_2$, которую первое вращение переводит в O_2 (ибо второе вращение оставляет

[1]) Точнее, когда $\alpha_1+\alpha_2$ кратно 360° (см. сноску на стр. 36).

[2]) Рекомендуем читателю попытаться доказать самостоятельно теорему о сложении центрально-подобных вращений, не используя того, что каждые две фигуры плоскости, соответствующие отрезки которых имеют постоянное отношение и образуют постоянный угол, могут быть получены одна из другой центрально-подобным преобразованием, а исходя лишь из определения таких преобразований.

O_2 на месте); точку $\bar{O}_2$ тоже легко найти. Поэтому, если $k_1 k_2 = 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 360°$, то отрезки $O_1 O_1'$ и $\bar{O}_2 O_2$ равны, параллельны и одинаково направлены (черт. 80, *а*); каждый из этих отрезков определяет величину и направление параллельного переноса, равного сумме наших центрально-подобных вращений. Если же сумма центрально-подобных вращений есть новое центрально-подобное вращение, то это центрально-подобное вращение переводит отрезок $O_1 \bar{O}_2$ в $O_1' O_2$ (черт. 80, *б*).

Покажем теперь, *как построить центр O центрально-подобного вращения, переводящего известный отрезок AB в другой известный отрезок $A'B'$* (в нашем случае отрезок $O_1 \bar{O}_2$ в отрезок $O_1' O_2$ [1])). Если угол между отрезками равен 180° или 360° и отрезки не равны, то центрально-подобное вращение представляет собой центрально-подобное преобразование; в этом случае O есть точка пересечения прямых AA' и BB' (черт. 81, *а*). Пусть теперь угол между отрезками не

Черт. 81.

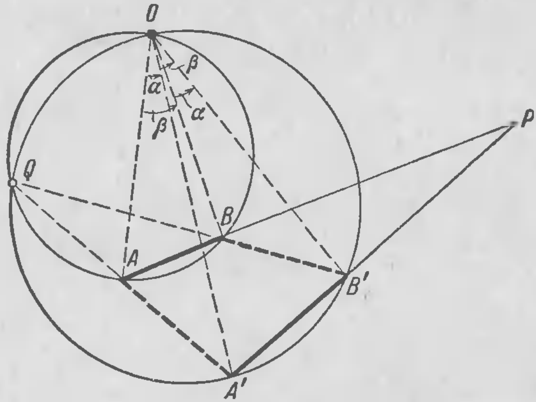
кратен 180°, т. е. отрезки AB и $A'B'$ не параллельны; обозначим через P точку пересечения этих отрезков (черт. 81, *б*). Тогда окружности, описанные вокруг треугольников $AA'P$ и $BB'P$, проходят через центр вращения O: действительно, $\angle AOA' = \angle APA'$ (угол поворота AOA' равен углу APA' между отрезками AB и $A'B'$); аналогично $\angle BOB' = \angle BPB'$ [2]);

[1]) Для нахождения центра O можно также построить в стороне треугольник с углом при вершине $\alpha_1 + \alpha_2$ (или $360° - (\alpha_1 + \alpha_2)$) и отношением боковых сторон $k_1 k_2$ и тем самым определить углы при основании треугольника $O_1' O_1 O$ (см. сноску на стр. 102).

[2]) См. сноску [2]) на стр. 50.

поэтому *центр O можно определить как вторую точку пересечения окружностей, описанных около треугольников $AA'P$ и $BB'P$* (см. черт. 81, *б*). Если эти две окружности касаются в точке P (черт. 81, *в*), т. е. если $\angle PAA' = \angle PBB'$ (оба эти угла равны углу между прямой $PA'B'$ и общей касательной к окружностям в точке P), то центр O совпадает с точкой P (ибо из подобия треугольников PAA' и PBB' следует $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$).

Отметим ещё, что центр O центрально-подобного вращения, переводящего отрезок AB в отрезок $A'B'$, совпадает с

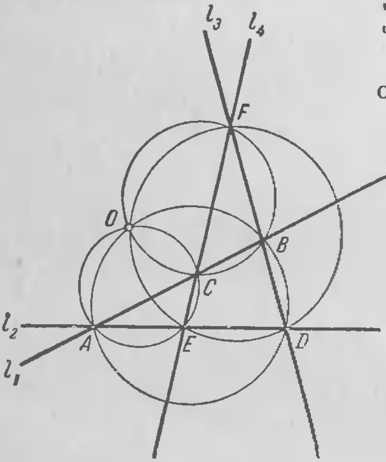


Черт. 82.

центром центрально-подобного вращения, переводящего отрезок AA' в отрезок BB': действительно, если $\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha$, $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$, то одновременно $\angle AOB = \angle A'OB' = \beta$ (на черт. 82 $\beta = \alpha + \angle A'OB$) и $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = l$. Отсюда следует, что *центр O можно также определить как точку пересечения окружностей, описанных около треугольников ABQ и $A'B'Q$*, где Q есть точка пересечения прямых AA' и BB' (или как точку пересечения прямых AB и $A'B'$, если $AA' \parallel BB'$; последнее будет иметь место в случае, изображённом на черт. 81, *в*, когда окружности, описанные около треугольников $AA'P$ и $BB'P$, касаются в точке P).

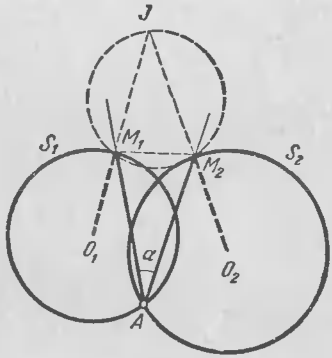
64. На плоскости даны четыре прямые l_1, l_2, l_3 и l_4, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Докажите, что окружности, описанные вокруг четырёх треугольников, образованных этими прямыми, пересекаются в одной точке (черт. 83).

См. также задачу 86 а) из § 1 гл. II (стр. 129). Далеко идущее обобщение предложения задачи 64 содержится в задаче 218 а) из § 1 гл. II третьей части книги.



Черт. 83.

65. Пусть S_1 и S_2 — две окружности с центрами O_1 и O_2, пересекающиеся в точке A. Рассмотрим угол определённой величины α с вершиной в точке A; пусть M_1 и M_2 — точки пересечения сторон угла с окружностями S_1 и S_2, J — точка пересечения прямых O_1M_1 и O_2M_2 (черт. 84).



Черт. 84.

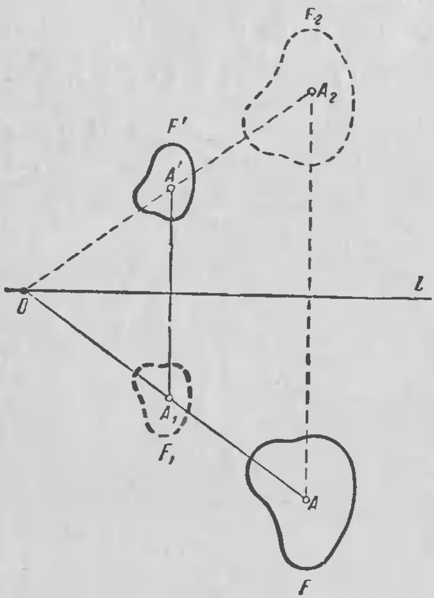
а) Докажите, что при вращении угла вокруг точки A описанная окружность треугольника M_1M_2J всё время проходит через постоянную точку O.

б) Найдите геометрическое место точек O, соответствующих всевозможным углам α.

66. Постройте n-угольник, зная вершины $M_1, M_2, \ldots, M_n$ n треугольников, построенных на его сторонах как на основаниях и подобных n заданным треугольникам. В каком случае задача не имеет решения или неопределённа?

Эта задача является обобщением задачи 19 из § 2 гл. I первой части.

Пусть фигура F_1 центрально-подобна фигуре F с центром подобия O и (положительным!) коэффициентом подобия k; F' — фигура, симметричная F_1 относительно некоторой прямой l, проходящей через O (черт. 85). В таком случае говорят, что фигура F' получается из F при помощи **центрально-подобной симметрии** с **коэффициентом подобия** k; точку O и прямую l называют **центром** и **осью** центрально-подобной симметрии. Ту же центрально-подобную симметрию можно также осуществить иначе: сначала произвести симметрию относительно прямой l, переводящую F в фигуру F_2, а затем произвести центрально-подобное преобразование с центром O и коэффициентом k, переводящее F_2 в F'. Иначе говоря, *центрально-подобная симметрия есть сумма центрально-подобного преобразования с центром O и симметрии относительно прямой l, проходящей через O*, **взятых в любом порядке**[1]). Очевидно, что если фигура F' получается при помощи центрально-подобной симметрии из фигуры F, то и, обратно, F можно получить из F' при помощи центрально-подобной симметрии (с теми же самыми центром O и осью l, но коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$); это позволяет говорить о фигурах, получающихся при помощи центрально-подобной симметрии друг из друга.

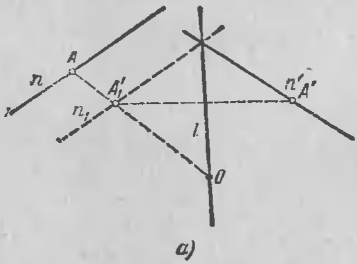


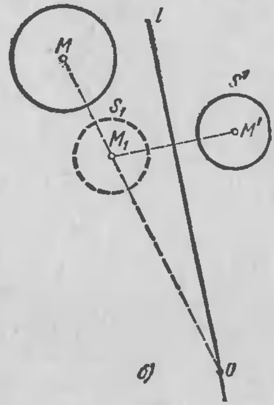
Черт. 85.

[1]) Отсюда вытекает, что центрально-подобная симметрия есть **преобразование подобия** в смысле определения, приведённого во введении к этой части (как сумма преобразования подобия и движения).

Прямую n центрально-подобная симметрия переводит в новую прямую n' (черт. 86, *а*), а окружность S — в новую окружность S' (черт. 86, *б*).

Единственной **неподвижной точкой** центрально-подобной симметрии (не являющейся просто симметрией относительно прямой l, которую можно рассматривать как центрально-подобную симметрию с коэффициентом подобия $k=1$) является





Черт. 86.

центр преобразования O. Единственными **неподвижными прямыми** центрально-подобной симметрии, отличной от симметрии относительно прямой, являются ось преобразования l и перпендикуляр, восставленный к прямой l в точке O.

67. Даны прямая l, точка A на ней и окружности S_1 и S_2. Постройте треугольник ABC, в котором прямая l является биссектрисой угла A, вершины B и C лежат соответственно на окружностях S_1 и S_2 и отношение сторон AB и AC имеет данную величину $m:n$.

68. Постройте четырёхугольник $ABCD$, диагональ которого является биссектрисой угла A, зная

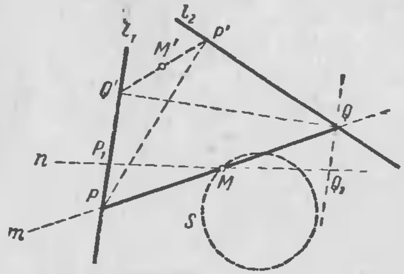
а) стороны AB и AD, диагональ AC и разность углов B и D;

б) стороны BC и CD, отношение сторон AB и AD и разность углов B и D;

в) стороны AB и AD, диагональ AC и отношение сторон BC и CD.

69. Решите задачу 68, заменив условие о том, что диагональ AC является биссектрисой угла A, более общим условием о том, что углы BAC и DAC имеют известную разность γ.

70. На плоскости заданы две прямые l_1 и l_2. Каждой точке M плоскости сопоставим новую точку M' следующим образом: пусть m — проходящая через M прямая, отрезок которой PQ, заключённый между l_1 и l_2, делится в точке M пополам[1]), P' и Q' — ортогональные проекции P и Q на l_2, соответственно на l_1, M' — середина $P'Q'$ (черт. 87). Пусть теперь точка M описывает окружность S; каково будет в таком случае геометрическое место точек M'?



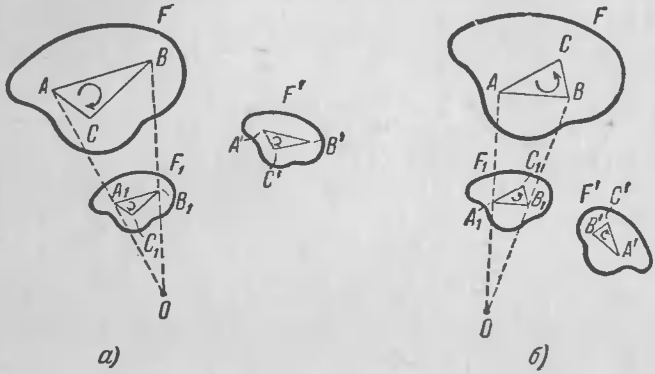
Черт. 87.

Аналогично тому, как мы различали между собой собственно-равные и зеркально-равные фигуры (см. выше, стр. 59—60), можно различать и два случая подобия плоских фигур. А именно, две подобные фигуры F и F' мы будем называть с о б с т в е н н о - п о д о б н ы м и, если фигура F_1, центрально-подобная F с коэффициентом подобия, равным отношению соответствующих отрезков F' и F, собственно-равна F' (черт. 88, *а*); если же эта фигура F_1 зеркально-равна F', то фигуры F и F' мы будем называть з е р к а л ь н о - п о д о б н ы м и (черт. 88, *б*). Две фигуры мы будем называть просто подобными лишь в том случае, если нам не важно, собственно-подобны эти фигуры или зеркально-подобны. Для того чтобы выяснить, являются ли две данные подобные фигуры F и F' собственно-подобными или зеркально-подобными, достаточно рассмотреть какие-нибудь три точки A, B, C фигуры F, не лежащие на одной прямой, и соответствующие им точки A', B', C'

---

[1]) Для построения m достаточно провести через M произвольную прямую n, пересекающую l_1 в P_1, и отложить $MQ_1 = MP_1$; в таком случае $QQ_1 \parallel l_1$ (см. черт. 87).

фигуры F'. Если фигуры F и F' собственно-подобны, то (подобные) треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют одинаковые направления обхода сторон; в противном случае эти треугольники



Черт. 88.

имеют разные направления обхода сторон (см. черт. 88, *а* и *б*).

Докажем теперь следующие две важные теоремы.

Теорема 1. *Всякие две собственно-подобные фигуры плоскости можно перевести одну в другую при помощи центрально-подобного вращения или параллельного переноса*[1]).

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства теоремы 1 из § 2 гл. II первой части (стр. 60—62). А именно: прежде всего легко видеть, что каждые два отрезка AB и $A'B'$ можно перевести один в другой при помощи центрально-подобного вращения с углом поворота, равным углу между отрезками, и коэффициентом подобия, равным отношению отрезков; исключение составляет лишь случай, когда отрезки равны, параллельны и одинаково направлены,— в этом случае они переводятся один в другой параллельным переносом (см. выше, стр. 102 и 22—23, где доказаны даже более общие предложения о произвольных фигурах). Переведём те-

[1]) Из этой теоремы следует, в частности, что всякие две собственно-подобные, но не равные, фигуры плоскости можно перевести одну в другую при помощи центрально-подобного вращения (ибо если фигуры могут быть переведены одна в другую при помощи параллельного переноса, то они равны).

перь центрально-подобным вращением или параллельным переносом какой-либо отрезок AB фигуры F в соответствующий ему отрезок $A'B'$ фигуры F', собственно-подобной F. Нетрудно показать, что при этом вся фигура F перейдёт в F'; доказательство этого совершенно аналогично заключительному рассуждению в доказательстве теоремы 1 из § 2 гл. II первой части.

Если фигуры F и F' можно перевести одну в другую при помощи центрально-подобного вращения с центром O, то точка O называется центром вращения (иногда ещё — центром подобия) фигур F и F'. Для того чтобы найти центр вращения O двух собственно-подобных фигур F и F', надо выбрать какие-нибудь соответствующие отрезки AB и $A'B'$ этих фигур. Если AB и $A'B'$ пересекаются в точке P, а AA' и BB' — в точке Q, то O есть вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников PAA' и PBB', или вторая точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников QAB и $QA'B'$ (см. выше, стр. 105—106). Если $AB \| A'B'$, то O совпадает с точкой Q, если $AA' \| BB'$, то O совпадает с точкой P. Наконец, если $AB \| A'B'$ и $AA' \| BB'$, то отрезки AB и $A'B'$ равны, параллельны и одинаково направлены; в этом случае фигуры F и F' переводятся одна в другую параллельным переносом и не имеют центра вращения.

Теорема 2. *Всякие две зеркально-подобные фигуры плоскости можно перевести одну в другую при помощи центрально-подобной симметрии или скользящей симметрии* [1]).

Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы 2 из § 2 гл. II первой части (стр. 63—64). Пусть A и B — две произвольные точки фигуры F, A' и B' — соответствующие им точки фигуры F', зеркально-подобной F. Докажем, что существует центрально-подобная симметрия (или скользящая симметрия), переводящая отрезок AB в отрезок $A'B'$. Действительно, пусть l есть ось центрально-подоб-

---

[1]) Из этой теоремы следует, в частности, что всякие две зеркально-подобные, но не равные фигуры плоскости можно перевести одну в другую при помощи центрально-подобной симметрии (ибо если фигуры могут быть переведены одна в другую скользящей симметрией, то они равны).

ной (или скользящей) симметрии, переводящей AB в $A'B'$ (черт. 89). Перенесём параллельно отрезок $A'B'$ в новое положение $A\bar{B}$. Отрезок A_1B_1, симметричный AB относительно l, центрально-подобен $A'B'$ или получается из $A'B'$ параллельным переносом; следовательно, отрезок A_1B_1, так же как и $A\bar{B}$, параллелен $A'B'$. Из того, что отрезок A_1B_1, симметричный AB относительно l, параллелен $A\bar{B}$, следует, что l параллельна биссектрисе l_0 угла $\bar{B}AB$.

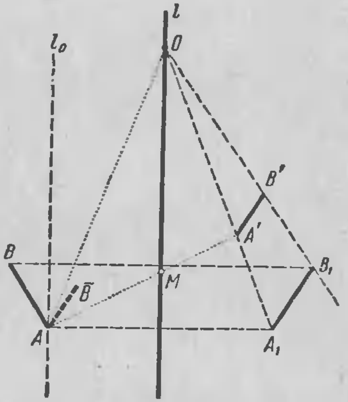
Далее, пусть $A'B' \neq AB$, O — центр центрально-подобной симметрии, переводящей AB в $A'B'$. В таком случае прямая l является биссектрисой треугольника AOA_1, а следовательно, и треугольника AOA'. Поэтому прямая l пересекает AA' в такой точке M, что

$$\frac{A'M}{MA} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OA'}{OA_1} = \frac{A'B'}{A_1B_1}$$

или

$$\frac{A'M}{MA} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Таким образом, если нам известны отрезки AB и $A'B'$, то мы можем построить прямую l: она параллельна биссектрисе угла $\bar{B}AB$ и делит отрезок AA' в отношении $\frac{A'B'}{AB}$. [Это построение сохраняет силу и в том случае, когда $A'B' = AB$; см. доказательство теоремы 2 из § 2 гл. II первой части.]



Черт. 89.

Симметрия относительно l переводит отрезок AB в отрезок A_1B_1, параллельный $A'B'$; A_1B_1 можно перевести в AB центрально-подобным преобразованием с центром в точке O пересечения $A'A_1$ и l $\left(\text{ибо } \frac{OA'}{OA_1} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'M}{MA} = \frac{A'B'}{AB}\right)$ или параллельным переносом в направлении прямой l. Тем самым центрально-подобная (или скользящая) симметрия, существование которой мы хотели доказать, найдена. Последующая часть доказательства теоремы 2 почти дословно повторяет заключительное рассуждение в доказательстве теоремы 2 из § 2 гл. II первой части и поэтому может быть здесь опущена.

Объединяя результаты теорем 1 и 2, можно сформулировать следующее общее предложение:

Каждые две подобные фигуры плоскости можно перевести одну в другую при помощи центрально-подобного вращения, или центрально-подобной симметрии, или параллельного переноса, или скользящей симметрии[1]).

Это предложение можно положить в основу определения преобразований подобия плоскости (ср. выше, стр. 67). А именно: можно считать, что преобразованиями подобия называются преобразования следующих четырёх типов: 1) центрально-подобные вращения (к числу которых причисляются также центрально-подобные преобразования и вращения вокруг точки); 2) центрально-подобные симметрии; 3) параллельные переносы; 4) скользящие симметрии (к числу которых причисляются также симметрии относительно прямой). При этом преобразования типов 1) и 3) естественно называть собственно-подобными (они переводят друг в друга собственно-подобные фигуры), а преобразования типов 2) и 4) — зеркально-подобными (они переводят друг в друга зеркально-подобные фигуры).

Теоремы 1 и 2 позволяют обобщить задачи 41—43 из § 2 гл. II первой части, заменив требование равенства отрезков AX и BY (соответственно отрезков AX, BY и CZ или BP, PQ и QC) требованием, чтобы эти отрезки имели наперёд заданное отношение (или отношения). Решения этих более общих задач аналогичны решениям исходных задач; рекомендуем читателю провести их самостоятельно.

71. а) Постройте прямоугольник, стороны которого проходят через четыре данные точки A, B, C и D, а диагональ имеет данную длину.

б) Постройте четырёхугольник $ABCD$, зная его углы и диагонали.

в) Даны четыре прямые, проходящие через одну точку. Постройте параллелограмм с данными длинами сторон, вершины которого располагаются на этих четырёх прямых.

---

[1]) В частности, каждые две подобные, но не равные фигуры всегда можно перевести одну в другую при помощи центрально-подобного вращения или центрально-подобной симметрии.

72. а) На плоскости даны точка M и две прямые l_1, l_2. Постройте треугольник ABC так, чтобы точка M делила сторону AB в данном отношении $\frac{BM}{MA}=k$, а l_1 и l_2 совпали с перпендикулярами, восставленными к сторонам BC и CA в их серединах.

б) На плоскости даны две точки M, N и прямая l. Постройте треугольник ABC так, чтобы точки M и N делили стороны AB и BC в данных отношениях $\frac{BM}{MA}=k_1$ и $\frac{CN}{NB}=k_2$, а l совпала с перпендикуляром, восставленным к стороне AC в её середине.

ГЛАВА II

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ

§ 1. Системы подобных между собой фигур

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые специальные системы подобных между собой фигур, обладающие интересными свойствами. Предварительно мы рассмотрим более простые системы р а в н ы х фигур.

Пусть F и F' — две равные фигуры плоскости. В § 2 гл. II первой части было показано, что эти фигуры всегда можно совместить одну с другой при помощи вращения вокруг точки или параллельного переноса, и на этом основании утверждалось, что все движения на плоскости ограничиваются вращениями и параллельными переносами [1]). При этом, однако, там совсем не рассматривались промежуточные положения, которые занимает фигура в процессе движения, а всё внимание сосредоточивалось лишь на её начальном и конечном положениях. Теперь же нас будет интересовать именно множество различных положений движущейся фигуры, представляющее собой некоторую систему равных между собой фигур [2]). Различных

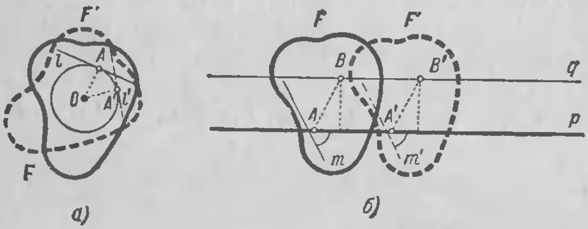
---

[1]) Здесь и далее под словами «равные фигуры» всегда следует понимать «собственно-равные фигуры» (см. выше, стр. 60); две зеркально-равные фигуры вообще нельзя совместить движением, оставляющим эти фигуры в плоскости.

[2]) Подчеркнём, что нас будет интересовать лишь множество различных положений движущейся фигуры, но не сам процесс движения; так, например, мы совсем не будем рассматривать скорости или ускорения движения отдельных точек. Привлечение механических соображений весьма часто позволяет упростить доказательство геометрических теорем; однако этой своеобразной главы геометрии (так называемой к и н е м а т и ч е с к о й г е о м е т р и и) мы не в состоянии здесь коснуться из-за недостатка места. [Отметим, что основные теоремы 1 и 2 настоящего параграфа могут быть доказаны и из механических соображений.]

систем такого рода, отвечающих различным возможным способам перемещения фигуры из положения F в положение F', существует, разумеется, бесконечно много; ниже будут рассмотрены лишь некоторые простейшие примеры таких систем.

Пусть фигура F вращается вокруг точки O, т. е. двигается так, что некоторая точка O, которую мы будем считать принадлежащей фигуре, остаётся неподвижной (черт. 90, *а*). В этом случае каждая точка A фигуры описывает окружность с центром O (ибо расстояние OA остаётся постоянным); каждая прямая l, связанная с фигурой, касается всё время постоянной окружности с центром O или проходит всё время через точку O (ибо расстояние от точки O до прямой l остаётся



Черт. 90.

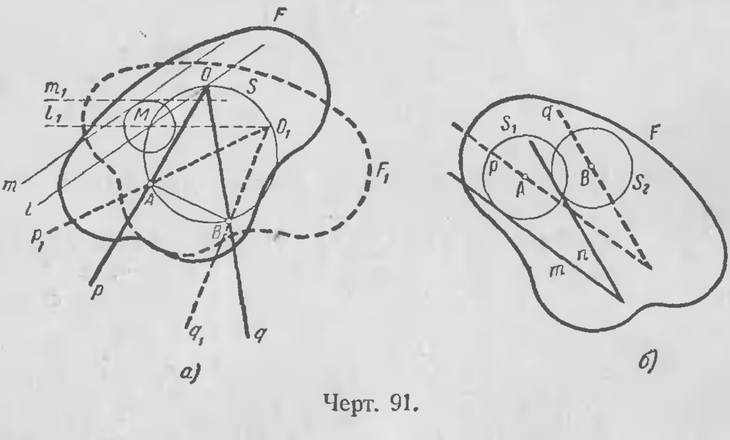
постоянным). Точка O является центром вращения для любых двух положений фигуры.

Рассмотрим теперь параллельный перенос фигуры в направлении некоторой прямой p (черт. 90, *б*), т. е. такое движение фигуры, при котором некоторая связанная с ней прямая p остаётся неподвижной (скользит сама по себе). При этом каждая точка B фигуры описывает прямую, параллельную p (ибо расстояние от B до p остаётся постоянным); каждая прямая m, не параллельная p, перемещается, оставаясь всё время параллельной самой себе (ибо угол, образованный m и p, не меняется); каждая прямая q, параллельная p, скользит сама по себе (ибо расстояние её от p не меняется). Каждые два положения фигуры можно перевести одно в другое параллельным переносом.

Если фигура F движется по плоскости так, что две параллельные прямые p и q этой фигуры проходят через неподвижные точки A и B, то прямая p скользит сама по себе (так как угол, образованный прямой p с отрезком AB, не может измениться: синус этого угла равен отношению расстояния между p и q к длине отрезка AB). Поэтому мы имеем здесь параллельный перенос фигуры, который уже рассматривался выше (см. черт. 90, *б*). Более сложно обстоит дело, если две непараллельные прямые фигуры проходят через неподвижные точки (такое движение фигуры можно осуществить следующим образом: укрепить на плоскости две булавки и двигать угольник, скреплённый с фигурой так, чтобы стороны угла всё время соприкасались с булавками). Здесь имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если фигура F движется по плоскости так, что две непараллельные прямые p и q этой фигуры проходят через неподвижные точки A и B, то каждая другая прямая фигуры или проходит через неподвижную точку, или касается определённой окружности.*

Доказательство теоремы 1. Пусть F и F_1 — два положения фигуры F, p и q, p_1 и q_1 — соответствующие



Черт. 91.

положения прямых p и q, O и O_1 — точки пересечения p и q, p_1 и q_1 (черт. 91, *а*). Точки O и O_1 лежат на дуге окружности S, построенной на отрезке AB и вмещающей угол, равный углу между прямыми p и q [1]). Пусть l и l_1 — два положения некоторой прямой l, проходящей через точку O пе-

[1]) См. сноску [2]) на стр. 50.

ресечения p и q, M и M_1 — точки пересечения l и l_1 с окружностью S. Так как $\angle MOA = \angle M_1O_1A$ (ибо угол между прямыми l и p не изменяется), то $\smile AM = \smile AM_1$, т. е. точка M_1 совпадает с M. Тем самым доказано, что прямая l проходит через постоянную точку M.

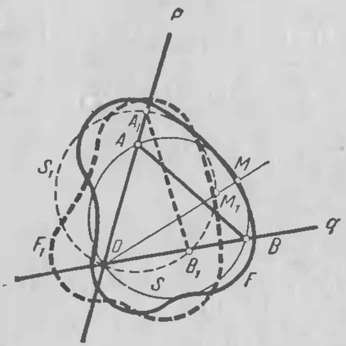
Пусть теперь m — прямая, не проходящая через O. Проведём через точку O прямую l, параллельную m. Прямая l, как мы уже видели, проходит через постоянную точку M. А так как расстояние между прямыми m и l остаётся постоянным, то прямая m должна всё время касаться окружности с центром в точке M и радиусом, равным расстоянию от l до m. Этим и завершается доказательство теоремы.

Пусть теперь *фигура F движется по плоскости так, что какие-то две непараллельные прямые m и n этой фигуры касаются неподвижных окружностей S_1 и S_2* (черт. 91, *б*). Проведём через центры A и B окружностей S_1 и S_2 прямые p и q, параллельные m и n соответственно. Расстояние между m и p равно радиусу S_1; так как оно не меняется при движении фигуры, то прямая p всё время проходит через неподвижную точку A. Точно так же прямая q всё время проходит через неподвижную точку B. Поэтому мы можем применить теорему 1; получим, что при таком движении также *каждая прямая фигуры F касается постоянной окружности или проходит через неподвижную точку*.

Если фигура F движется по плоскости так, что две точки A и B этой фигуры описывают п а р а л л е л ь н ы е прямые p и q, то отрезок AB остаётся всё время сам себе параллелен (ибо синус угла между AB и p не может измениться: он равен отношению расстояния между p и q к длине отрезка AB). Поэтому каждые два положения фигуры можно перевести одно в другое параллельным переносом в направлении прямой p; таким образом, мы имеем здесь параллельный перенос фигуры, который рассматривался ранее (см. черт. 90, *б*). Сложнее обстоит дело, если некоторый отрезок AB фигуры скользит своими концами по н е п а р а л л е л ь н ы м прямым. Здесь имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2. *Если фигура F движется по плоскости так, что две её точки A и B описывают прямые p и q, пересекающиеся в точке O, то существует окружность S,* *связанная с фигурой F, все точки которой описывают прямые, проходящие через ту же точку O.*

Доказательство теоремы 2. Пусть F и F_1 — два положения фигуры F, AB и A_1B_1 — соответствующие положения отрезка AB (черт. 92). Построим окружность S, проходящую через точки A, B и O. Будем считать, что эта окружность связана с фигурой F, и пусть S_1 — положение, которое она займёт, когда фигура F перейдёт в положение F_1; очевидно, что S_1 тоже проходит через O (ибо $\smile AB$ окружности $S = \smile A_1B_1$ окружности $S_1 = 2\angle AOB$)[1]. Пусть M — произвольная точка окружности S, M_1 — соответствующая точка окружности S_1. Из равенства фигур F и F_1 следует, что дуги AM и A_1M_1 окружностей S и S_1 равны; значит, равны и опирающиеся на эти дуги вписанные углы AOM и A_1OM_1. Но последнее означает, что прямая OM_1 совпадает с прямой OM. Следовательно, каждая точка M окружности S движется по прямой, проходящей через O, что нам и требовалось доказать.



Черт. 92.

Отметим ещё, что центр N окружности S движется по окружности с центром O и радиусом, равным радиусу R окружности S; это следует из того, что окружность S всё время проходит через точку O и, следовательно, расстояние ON всё время остаётся равным R.

73. Постройте треугольник, который равен данному и стороны которого

а) проходят через три данные точки;

б) касаются трёх данных окружностей.

В другой связи задача 73 а) приведена в § 1 гл. I первой части (см. задачу 6 б) на стр. 21).

---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 50.

74. а) Гипотенуза прямоугольного треугольника скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найдите геометрическое место вершин прямого угла.

б) Бóльшая сторона равнобедренного треугольника с тупым углом в $120°$ скользит своими концами по сторонам угла в $60°$. Найдите геометрическое место вершин тупого угла.

75. На плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2 и окружность S. Постройте прямоугольный треугольник ABC с данным острым углом α, вершины A и B которого лежат на прямых l_1 и l_2, а вершина C прямого угла — на окружности S.

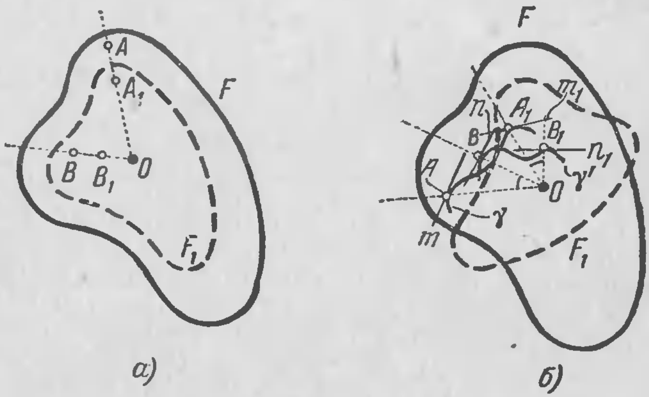
Пусть теперь F и F_1 — две подобные фигуры плоскости[1]). В § 2 гл. I настоящей части было показано, что F можно перевести в F' при помощи центрально-подобного вращения; при этом, однако, не рассматривались промежуточные положения, которые занимает фигура в процессе перехода из положения F в положение F'. Теперь мы будем рассматривать системы подобных между собой фигур, представляющие собой разные положения фигуры, которая переходит из какого-то положения F в другое положение F', оставаясь всё время подобной самой себе.

Пусть сначала *фигура F изменяется, оставаясь всё время подобной самой себе, так, что некоторая точка O фигуры остаётся неподвижной.* Если при этом какая-то точка A фигуры описывает окружность с центром O, то расстояние между точками O и A фигуры не меняется; следовательно, фигура остаётся всё время равной (а не только подобной) первоначальной, и все точки фигуры описывают окружности с центром O (см. выше, черт. 90, *а*). Если точка A фигуры описывает прямую, проходящую через O, то и любая другая точка B описывает прямую, проходящую через O (ибо угол BOA не может измениться, так как фигура остаётся подобной первоначальной); такое изменение фигуры будет означать, что она всё время остаётся центрально-подобной своему первоначальному положению с центром подобия O

---

[1]) Здесь и далее под словом «подобный» всегда понимается «собственно-подобный» (см. выше, стр. 110).

(черт. 93, *а*). Предположим теперь, *что точка A фигуры описывает произвольную линию* γ; покажем, что и *всякая другая точка B* (кроме точки O, разумеется) *опишет линию, подобную* γ (черт. 93, *б*). Действительно, пусть F — начальное и F_1 — любое другое положение фигуры F; A, B и A_1, B_1 — соответствующие положения точек A и B. Так как фигура остаётся сама себе подобной и точка O фигуры остаётся



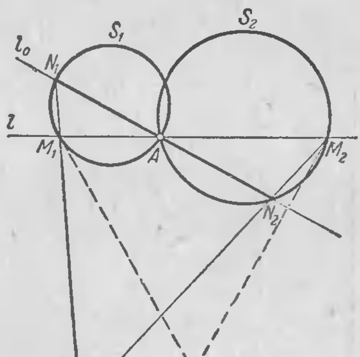
Черт. 93.

на месте, то треугольники OAB и OA_1B_1 подобны; следовательно, $\angle B_1OA_1 = \angle BOA$ и $\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB}{OA}$. Обозначим угол BOA через α и отношение $\frac{OB}{OA}$ через k; последнее равенство доказывает, что центрально-подобное вращение с центром O, коэффициентом подобия k и углом поворота α переводит B_1 в A_1. Так как F_1 — произвольное положение фигуры, то это означает, что центрально-подобное вращение переводит всю линию γ', описываемую точкой B, в линию γ, описываемую точкой A. Но если две линии можно перевести одну в другую центрально-подобным вращением, то они подобны, что нам и требовалось доказать.

Точно так же показывается, что *если прямая m фигуры F, не проходящая через точку O, всё время касается некоторой кривой γ, то другая произвольная прямая n фигуры* (тоже не проходящая через O) *всё время касается кривой, подобной* γ (см. черт. 93, *б*). Эта кривая получается из кривой γ при помощи центрально-подобного вращения с центром O, переводящего прямую m в прямую n. В частности, если некоторая прямая m фигуры F, не проходящая через O, всё время проходит через постоянную точку M, то каждая прямая n фигуры всё время проходит через постоянную точку (свою для каждой прямой).

Отметим ещё, что если фигура F изменяется так, что одна её точка O остаётся неподвижной, то точка O является центром вращения для каждых двух положений фигуры. Действительно, из подобия треугольников AOB и A_1OB_1 (черт. 93, *б*) следует, что и треугольники AOA_1 и BOB_1 тоже подобны $\left(\angle AOA_1 = \angle BOB_1\right.$, так как $\angle AOA_1 = \angle AOB + \angle BOA_1$ и $\angle BOB_1 = \angle A_1OB_1 + \angle BOA_1$; $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB}$, так как $\left.\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB}{OA}\right)$. А последнее означает, что фигура F_1 получается из фигуры F при помощи центрально-подобного вращения с центром в точке O, углом поворота A_1OA и коэффициентом подобия $\frac{OA_1}{OA}$.

Обратно, если фигура изменяется, оставаясь сама себе подобной, так, что каждые два положения фигуры имеют один и тот же центр вращения O, то точка O, если её считать точкой фигуры, очевидно, остаётся неподвижной (ибо центр есть неподвижная точка центрально-подобного преобразования).



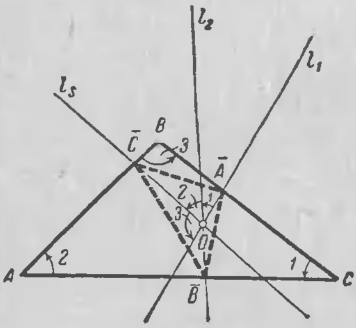
Черт. 94.

76. Через точку A пересечения окружностей S_1 и S_2 проводятся произвольная прямая l и фиксированная прямая l_0, пересекающие второй раз S_1 и S_2 в точках M_1, M_2 и N_1, N_2; пусть M_1M_2P есть равносторонний треугольник, построенный на отрезке M_1M_2, Q — точка пересечения прямых M_1N_1 и M_2N_2 (черт. 94). Докажите, что когда l вращается вокруг A,

а) вершина P треугольника M_1M_2P описывает окружность Σ, а его стороны M_1P и M_2P поворачиваются вокруг каких-то фиксированных точек I_1 и I_2 (M_1P проходит через I_1, а M_2P — через I_2);

б) точка Q описывает окружность Г. Найдите геометрическое место центров окружностей Г, отвечающих разным положениям прямой l_0.

77. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC и пересекающая его основание BC в точке M, O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABM и ACM. Найдите геометрическое место середин отрезков O_1O_2, отвечающих всевозможным положениям прямой l.



Черт. 95.

78. Дан треугольник ABC и некоторая точка O. Через O проводятся прямые l_1, l_2 и l_3, углы между которыми равны углам треугольника; пусть $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ — точки пересечения этих прямых с соответствующими сторонами ABC (черт. 95; обратите внимание на направление углов).

а) Докажите, что если точка O совпадает с

1° центром описанной окружности;

2° центром вписанной окружности;

3° точкой пересечения высот

треугольника ABC, то эта точка одновременно является

1° точкой пересечения высот;

2° центром описанной окружности;

3° центром вписанной окружности

треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

б) Пусть точка O — произвольная, прямые l_1, l_2, l_3 вращаются вокруг O. Найдите геометрическое место

1° центров описанной окружности;

2° центров вписанной окружности;

3° точек пересечения высот

треугольников $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

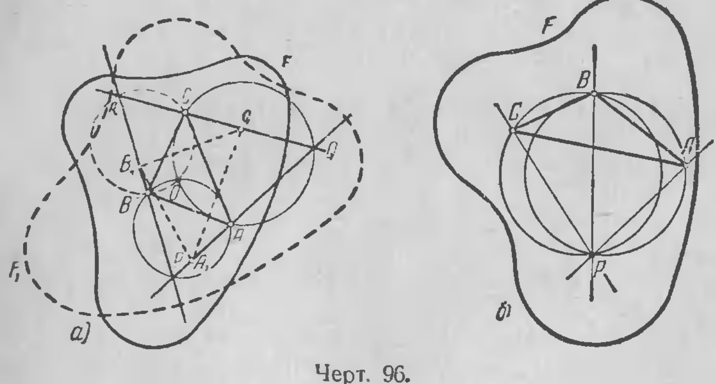
Перейдём теперь к теоремам, доказательство которых составляет основную цель этого параграфа.

Теорема 3. *Если фигура F изменяется, оставаясь подобной сама себе, так, что три точки A, B и C этой фигуры описывают три прямые, не проходящие через одну точку, то каждая точка фигуры описывает прямую линию.*

Теорема 4. *Если фигура F изменяется, оставаясь подобной сама себе, так, что три прямые l, m и n этой фигуры, не проходящие через одну точку, проходят всё время через три неподвижные точки, то каждая прямая фигуры проходит всё время через неподвижную точку, а каждая точка фигуры описывает окружность.*

Доказательство теоремы 3. Покажем, что каждые два положения фигуры F имеют один и тот же центр вращения O (т. е. что при изменении фигуры F некоторая точка O этой фигуры остаётся неподвижной). Отсюда будет следовать, что все точки фигуры F описывают линии, подобные той, какую описывает точка A, т. е. прямые; а это нам и требуется доказать.

Обозначим точки пересечения прямых, по которым двигаются точки A, B и C, соответственно буквами P, Q и R (черт. 96, a). Пусть F и F_1 — два положения изменяющейся



Черт. 96.

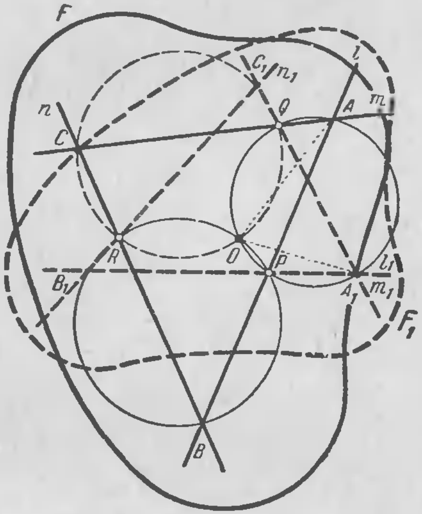
фигуры F; A, B, C и A_1, B_1, C_1 — соответствующие положения трёх рассматриваемых точек. Центр вращения O фигур F и F_1 является в то же время центром вращения отрезков

AB и A_1B_1, AC и A_1C_1. Но центр вращения отрезков AB и $A'B'$, как указывалось на стр. 106 (см. черт. 82), лежит на окружностях, описанных вокруг треугольников ABQ и $A'B'Q$, где Q — точка пересечения AA' и BB'; в нашем случае это означает, что точка O должна лежать на окружности, описанной вокруг $\triangle ABP$ (и на окружности, описанной вокруг $\triangle A_1B_1P$). Точно так же центр вращения отрезков AC и A_1C_1 лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ACQ (и на окружности, описанной вокруг $\triangle A_1C_1Q$). Таким образом, центр вращения фигур F и F_1 определяется как точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников ABP и ACQ и, значит, *не зависит от положения F_1 изменяющейся фигуры*. А это и означает, что каждые два положения нашей фигуры имеют один и тот же центр вращения, что и завершает доказательство.

Если прямые, которые описывают точки A, B и C фигуры F, проходят через одну точку P (черт. 96, *б*), то в общем случае утверждение теоремы остаётся справедливым. Доказательство в этом случае не отличается от проведённого выше; общий центр подобия всех положений фигуры попрежнему будет совпадать с точкой пересечения окружностей ABP и BCP (где A, B и C — какое-то фиксированное положение рассматриваемых точек фигуры F), т. е. с точкой P. Исключение может представлять лишь случай, когда окружности ABP и BCP совпадают, т. е. точки A, B, C лежат на одной окружности с точкой P, или, что то же, когда $\angle APB + \angle ACB = 180°$ и точки P и C лежат по разные стороны от прямой AB, или $\angle APB = \angle ACB$ и точки P и C лежат по одну сторону от прямой AB. В этом случае утверждение теоремы может оказаться неверным.

Доказательство теоремы 4. Покажем, что каждые два положения фигуры F имеют один и тот же центр вращения O и что некоторая точка A фигуры описывает окружность. В таком случае из сказанного на стр. 122—123 будет следовать, что каждая прямая фигуры проходит через неподвижную точку (поскольку прямая l проходит через неподвижную точку) и что каждая точка фигуры описывает окружность (поскольку точка A описывает окружность).

Обозначим попарные точки пересечения прямых l, m и n соответственно через A, B, и C и неподвижные точки, через которые проходят эти прямые, через P, Q и R (черт. 97). Прежде всего очевидно, что точка A описывает окружность, поскольку величина угла QAP должна сохраняться в процессе изменения фигуры (угол между прямыми l и m фигуры не может измениться, поскольку фигура остаётся подобной сама себе) [1]). Далее, пусть F и F_1 — два положения изменяющейся фигуры; l, m, n и l_1, m_1, n_1 — соответствующие положения трёх рассматриваемых прямых; A, B, C и A_1, B_1, C_1 — соответствующие положения точек A, B и C. Если O есть центр вращения фигур F и F_1, то угол AOA_1 равен углу поворота



Черт. 97.

центрально-подобного вращения, переводящего F в F_1, и, следовательно, равен углу между прямыми l и l_1 или углу между m и m_1. Таким образом, $\angle AOA_1 = \angle APA_1 = \angle AQA_1$, т. е. точка O лежит на окружности, проходящей через точки A, A_1, P и Q. Точно так же показывается, что O лежит на окружности, проходящей через точки B, B_1, P и R. Отсюда видно, что центр вращения O фигур F и F_1 совпадает с точкой пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников APQ и BPR, и, значит, не зависит от положе-

---

[1]) Это рассуждение предполагает, что точка A прямой l в своём движении не проходит через неподвижную точку P (или неподвижную точку Q); в противном случае угол QAP заменяется дополнением его до 180° (см. сноску [2]) на стр. 50).

ния F_1 изменяющейся фигуры. Но это и означает, что каждые два положения фигуры F имеют один и тот же центр вращения.

Если прямые l, m и n фигуры F проходят через одну точку A, то утверждение теоремы 2 может оказаться и неверным.

79. Постройте четырёхугольник $ABCD$, подобный данному (например, квадрат),

а) вершины которого лежат на четырёх данных прямых;

б) стороны которого проходят через четыре данные точки;

в) стороны BC, CD и диагональ BD которого проходят через три данные точки, а вершина A лежит на данной окружности.

Задачи 79 а) и б) можно сформулировать также следующим образом:

а) в данный четырёхугольник впишите четырёхугольник, подобный другому данному четырёхугольнику (например, квадрат);

б) вокруг данного четырёхугольника опишите четырёхугольник, подобный другому данному четырёхугольнику (например, квадрат).

80. Проведите прямую l так, чтобы три отрезка, которые высекают на ней данные четыре прямые l_1, l_2, l_3 и l_4, находились в известных отношениях.

81. Повернём все стороны треугольника ABC вокруг середины сторон на один и тот же угол α (и в одном направлении); пусть $A'B'C'$ — треугольник, образованный повёрнутыми прямыми. Найдите геометрическое место точек пересечения высот, биссектрис и медиан треугольников $A'B'C'$, отвечающих различным значениям угла α. Докажите, что центры описанных окружностей всех этих треугольников совпадают.

82. Пусть M, K и L — три точки, лежащие на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC. Докажите, что

а) окружности S_1, S_2 и S_3, описанные вокруг треугольников LMA, MKB и KLC, пересекаются в одной точке;

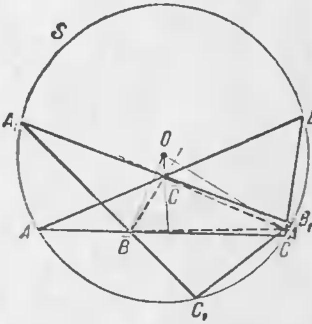
б) треугольник, образованный центрами окружностей S_1, S_2 и S_3, подобен треугольнику ABC.

Предложение задачи 82 а) допускает весьма значительное развитие; по этому поводу см. задачу 218 б) из § 1 гл. II третьей части. Аналогично можно обобщить и предложение задачи 82 б); мы, однако, не будем на этом останавливаться.

83. В окружность S вписаны два собственно-равных (см. выше, стр. 60) треугольника ABC и $A_1B_1C_1$; пусть $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ — точки пересечения их соответствующих сторон (черт. 98). Докажите, что

а) треугольник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ подобен треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$;

б) точка пересечения высот треугольника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ совпадает с центром окружности S.

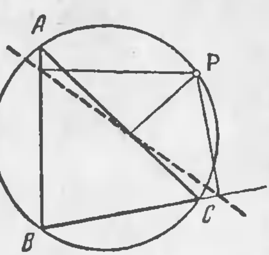


Черт. 98.

84. Пусть l — произвольная прямая плоскости, l_1, l_2 и l_3 — три прямые, симметричные l относительно сторон данного (непрямоугольного!) треугольника ABC, T — треугольник, образованный l_1, l_2, l_3. Докажите, что

а) все треугольники T, соответствующие разным положениям прямой l, подобны между собой;

б) все прямые l такие, что l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке P, проходят через точку H пересечения высот треугольника ABC; геометрическим местом точек T пересечения l_1, l_2, l_3 является описанная окружность треугольника ABC;



Черт. 99.

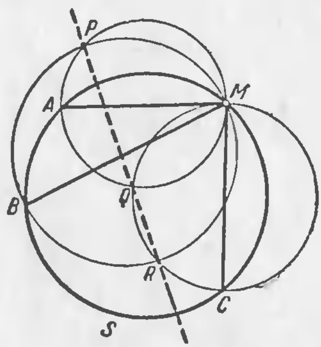
в) все прямые l такие, что треугольники T имеют определённую площадь, касаются одной и той же окружности с центром H.

85. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника ABC из какой-нибудь точки P, в том и только том случае лежат на одной прямой (п р я м а я С и м с о н а, черт. 99), если точка P лежит на описанной вокруг ABC окружности.

86. Выведите из результата задачи 85 доказательства следующих теорем:

а) четыре окружности, описанные вокруг четырёх треугольников, образованных произвольными четырьмя прямыми (никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны), проходят через одну точку;

б) попарные точки пересечения трёх окружностей, построенных как на диаметрах на трёх хордах MA, MB и MC одной окружности S, лежат на одной прямой (черт. 100);



Черт. 100.

в) если a, b, c и d — длины последовательных сторон четырёхугольника $ABCD$, вокруг которого можно описать окружность, а e и f — длины его диагоналей, то

$$ac + bd = ef$$

(теорема Птолемея).

Теорема задачи 86 а) в другой связи была приведена в § 2 гл. I настоящей части (см. задачу 64 на стр. 107, в частности черт. 83). Теорема Птолемея в другой связи будет приведена в гл. II третьей части книги (см. задачи 258 и 269 из § 4); там же будет приведена теорема, обратная теореме Птолемея (см. задачу 269), и теорема, которую можно рассматривать как значительное обобщение теоремы Птолемея (см. задачи 261 из § 4 и 273 из § 5).

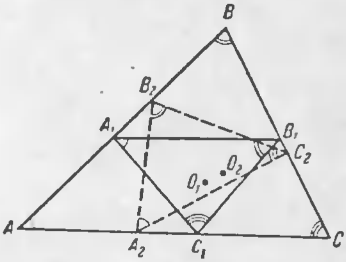
87. На плоскости даны четыре прямые, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения высот четырёх треугольников, образованных этими прямыми, лежат на одной прямой.

В другой связи эта задача будет приведена в § 2 гл. I третьей части книги (см. задачу 130 б)).

88. Найдите геометрическое место точек M таких, что отрезки касательных, проведённых из M к двум данным пересекающимся окружностям S_1 и S_2, имеют известное отношение.

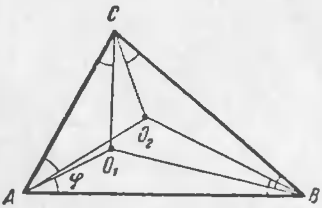
См. также задачи 250 б) из § 3 и 260 из § 4 гл. II третьей части книги.

Впишем в данный треугольник ABC треугольник $A_1B_1C_1$, подобный ABC (порядок букв указывает соответствие сторон), так, чтобы вершина A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ лежала на стороне AB, вершина B_1 — на стороне BC и вершина C_1 — на стороне CA (черт. 101). Треугольников $A_1B_1C_1$, удовлетворяющих поставленному условию, можно построить бесконечно много — можно выбрать произвольным образом направление одной из сторон или положение одной из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ (см. задачу 47 б) из § 1 или задачу 60 а) из § 2 гл. I). Все построенные таким образом треугольники $A_1B_1C_1$ имеют с треугольником ABC один и тот же центр вращения O_1 (см. доказательство теоремы 3). Точка O_1 называется *первым центром вращения* треугольника ABC. *Вторым центром вращения* треугольника ABC называется точка O_2, являющаяся центром вращения подобных треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ (порядок букв указывает соответствие сторон), где треугольник $A_2B_2C_2$ вписан в треугольник ABC таким образом, что точка A_2 лежит на стороне CA, точка B_2 — на стороне AB и точка C_2 — на стороне BC.



Черт. 101.

89. Пусть $A'B'C'$ — треугольник, подобный $\triangle ABC$ (порядок букв указывает соответствие сторон) и такой, что точка A' лежит на стороне BC, точка B' — на стороне AC и точка C' — на стороне AB треугольника ABC. Докажите, что центр вращения O треугольников $A'B'C'$ и ABC совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC.



Черт. 102.

90. Пусть O_1 и O_2 — первый и второй центры вращения треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Докажите, что

а) $\angle O_1AB = \angle O_1BC = \angle O_1CA = \angle O_2BA = \angle O_2CB = \angle O_2AC$ (черт. 102); обратно, если, например, $\angle MAB = \angle MBC = \angle MCA$, то точка M совпадает с O_1;

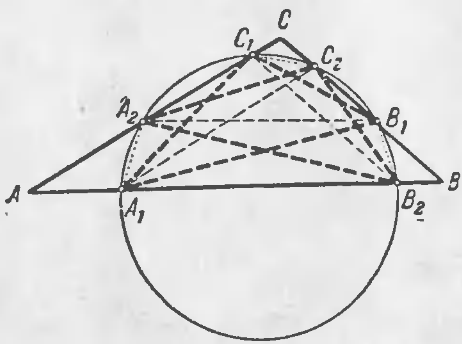
б) O_1 совпадает с O_2 в том и только том случае, если треугольник ABC равносторонний;

в) O_1 и O_2 равноудалены от O: $O_1O = O_2O$;

г) общее значение φ углов O_1AB, O_1BC, O_1CA, O_2BA, O_2CB и O_2AC не превосходит $30°$; при этом $\varphi = 30°$ в том и только том случае, если треугольник ABC равносторонний.

91. Постройте центры вращения O_1 и O_2 данного треугольника ABC.

92. Пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — треугольники, вписанные в треугольник ABC и подобные этому треугольнику (порядок букв указывает соответствие сторон), и такие, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, а точки A_2, B_2 и C_2 — соответственно на сторонах CA, AB и BC этого треугольника. Пусть, кроме



Черт. 103.

того, стороны A_1B_1 и A_2B_2 треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ образуют равные углы со стороной AB треугольника ABC (черт. 103). Докажите, что

а) треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны между собой;

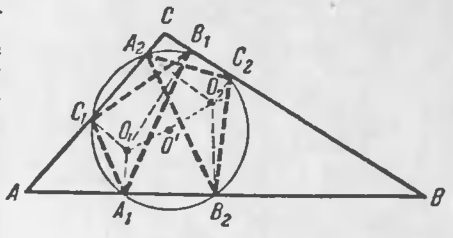
б) прямые B_2C_1, C_2A_1 и A_2B_1 параллельны сторонам BC, CA и AB, а прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 антипараллельны[1]) этим сторонам;

в) шесть точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности.

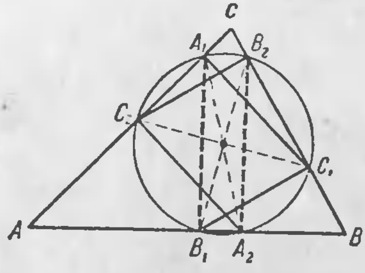
---

[1]) Отрезок PQ, пересекающий стороны AB и AC треугольника ABC (точка P лежит на стороне AB, точка Q — на стороне AC), называется **антипараллельным** стороне BC, если $\angle APQ = \angle ACB$, $\angle AQP = \angle ABC$ (отрезок PQ параллелен стороне BC, если $\angle APQ = \angle ABC$, $\angle AQP = \angle ACB$).

93. а) Пусть A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 — проекции первого и второго центров вращения треугольника ABC на стороны треугольника. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ оба подобны треугольнику ABC и равны между собой и что шесть точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности, центр которой находится в середине отрезка, соединяющего первый и второй центры вращения треугольника ABC (черт. 104, *а*).



а)



б)

Черт. 104.

б) Докажите, что в данный треугольник ABC можно вписать два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ таких, что стороны этих треугольников перпендикулярны к сторонам треугольника ABC; при этом оба эти треугольника равны между собой и три отрезка, соединяющих соответствующие вершины этих треугольников, равны между собой и пересекаются в одной точке, которая является общей серединой этих отрезков (черт. 104, *б*).

94. Пусть O_1 есть один из центров вращения треугольника ABC; A', B', C' — точки пересечения прямых AO_1, BO_1, CO_1 с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC. Докажите, что

а) треугольник $A'B'C'$ равен треугольнику ABC;

б) шесть треугольников, на которые разбивается шестиугольник $AC'BA'CB'$ прямыми, соединяющими его вершины с точкой O_1, все подобны треугольнику ABC.

95. Пусть M — произвольная точка внутри треугольника ABC. Докажите, что хоть один из углов MAB, MBC, MCA и хоть один из углов MAC, MCB, MBA не больше 30°.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим некоторые свойства трёх подобных фигур F_1, F_2, F_3. Попарные центры вращения этих фигур обозначим через O_3, O_2 и O_1. Треугольник $O_1O_2O_3$ называется **треугольником подобия**, а описанная около него окружность — **окружностью подобия** фигур F_1, F_2 и F_3 [1]). В случаях, когда точки O_1, O_2 и O_3 лежат на одной прямой или совпадают, окружность подобия вырождается в прямую — **ось подобия** или в точку — **центр подобия** трёх фигур. [Если F_1, F_2 и F_3 попарно центрально-подобны, то окружность подобия обязательно вырождается в прямую или точку; см. теорему о трёх центрах подобия на стр. 93—94.]

В задачах 96, 97 мы будем считать, что окружность подобия трёх фигур F_1, F_2 и F_3 не вырождается ни в прямую, ни в точку.

96. На плоскости даны три подобные фигуры F_1, F_2 и F_3. Пусть A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 — три соответствующих отрезка этих фигур; $D_1D_2D_3$ — треугольник, сторонами которого являются прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (черт. 105). Докажите, что

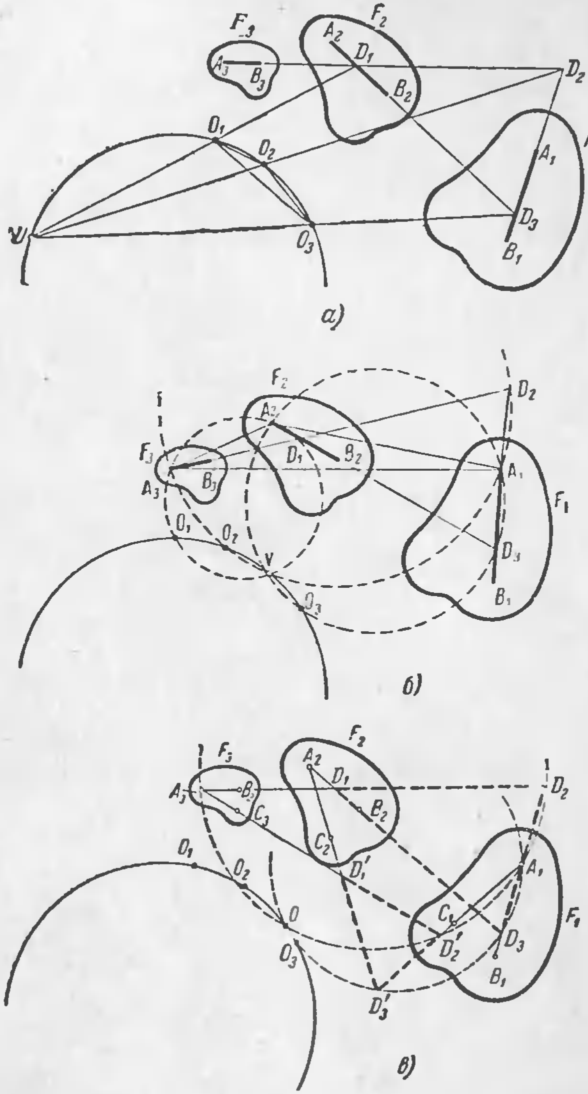
а) прямые D_1O_1, D_2O_2 и D_3O_3 пересекаются в одной точке U, лежащей на окружности подобия фигур F_1, F_2 и F_3 (черт. 105, *а*);

б) окружности, описанные около треугольников $A_1A_2D_3$, $A_1A_3D_2$ и $A_2A_3D_1$, пересекаются в одной точке V, лежащей на окружности подобия фигур F_1, F_2 и F_3 (черт. 105, *б*);

в) пусть $D_1'D_2'D_3'$ есть какой-то отличный от $D_1D_2D_3$ треугольник, сторонами которого являются три соответствующие друг другу прямые фигур F_1, F_2 и F_3. В таком случае треугольники $D_1D_2D_3$ и $D_1'D_2'D_3'$ собственно-подобны и центр вращения O этих двух треугольников лежит на окружности подобия фигур F_1, F_2 и F_3 (черт. 105, *в*).

---

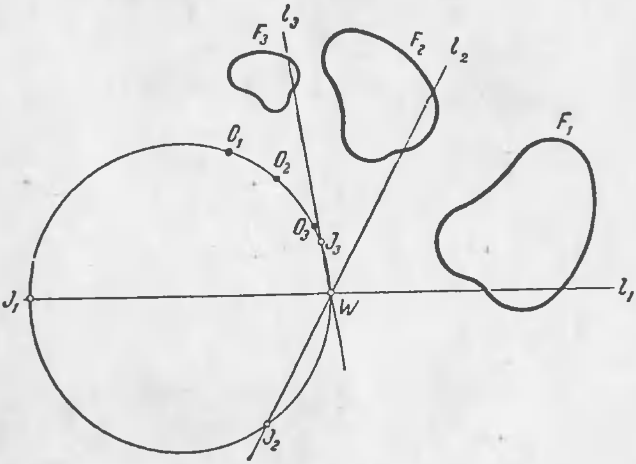
[1]) Понятие центра вращения двух собственно-подобных фигур обобщает: 1° центр вращения собственно-равных фигур; 2° центр подобия центрально-подобных фигур. Поэтому соответствующую точку можно было бы с равным основанием назвать центром вращения или центром подобия фигур. В вопросах, которым посвящён конец этого параграфа, было бы более удобным второе название (в этом случае мы сказали бы: три попарных центра подобия трёх собственно-подобных фигур образуют треугольник подобия этих фигур). Однако название «центр вращения» более распространено в литературе.



F3
F2
A2
D1
A3
B3
D2
B2
O1
O2
F1
A1
W
O3
D3
B1
а)
F2
D2
A2
F3
B3
D1
B2
A1
A3
F1
O1
O2
V
D3
O3
B1
б)
F2
F3
A2
A3
B3
D1
C3
B2
D2
C2
O1
O2
D1′
A1
O
C1
D3
F1
D2′
O3
B1
D3′
в)

Черт. 105.

97. Пусть F_1, F_2 и F_3 — три подобные фигуры; l_1, l_2 и l_3 — соответствующие друг другу прямые этих фигур, пересекающиеся в одной точке W (черт. 106). Докажите, что



Черт. 106.

а) точка W лежит на окружности подобия фигур F_1, F_2, F_2;

б) прямые l_1, l_2 и l_3 проходят соответственно через три постоянные (не зависящие от выбора прямых l_1, l_2, l_3) точки J_1, J_2 и J_3, расположенные на окружности подобия фигур F_1, F_2, F_3.

Кроме теорем, составляющих содержание задач 96 и 97, можно отметить ещё большое число замечательных свойств, которыми обладают три подобные между собой фигуры F_1, F_2 и F_3. Перечислим здесь некоторые из этих свойств.

I. Треугольник $J_1J_2J_3$ (см. задачу 97 б)) зеркально-подобен треугольнику $D_1D_2D_3$, сторонами которого являются три произвольные соответствующие друг другу прямые фигур F_1, F_2 и F_3.

II. Прямые J_1O_1, J_2O_2, J_3O_3 пересекаются в одной точке T.

III. Если три соответствующие друг другу точки A_1, A_2 и A_3 фигур F_1, F_2 и F_3 лежат на одной прямой l, то эта прямая проходит через фиксированную точку T (совпадающую с точкой, фигурирующей в свойстве II). Обратно, каждая прямая, проходящая через точку T, содержит три соответствующие друг другу точки фигур F_1, F_2 и F_3.

IV. Если A_1, A_2 и A_3 суть три соответствующие друг другу точки фигур F_1, F_2 и F_3, то окружности, описанные около треугольников $A_1O_2O_3$, $A_2O_1O_3$ и $A_3O_1O_2$, пересекаются в одной точке.

V. Будем называть основным треугольником точки A_1 фигуры F_1 треугольник $A_1A_2A_3$, где A_2 и A_3 — точки фигур F_2 и F_3, соответствующие точке A_1 фигуры F_1. Тогда:

а) геометрическое место точек A_1 фигуры F_1 таких, что основной треугольник этих точек имеет данный угол $A_2A_1A_3$ (или данный угол $A_1A_2A_3$, или данный угол $A_1A_3A_2$), есть окружность;

б) геометрическое место точек A_1 таких, что основной треугольник $A_1A_2A_3$ имеет данную сторону A_2A_3 (или данную сторону A_1A_3, или данную сторону A_2A_1), есть окружность;

в) геометрическое место точек A_1 таких, что основной треугольник $A_1A_2A_3$ имеет данное отношение сторон $\frac{A_1A_2}{A_1A_3}$ $\left(\text{или данное отношение } \frac{A_1A_2}{A_2A_3}, \text{ или данное отношение } \frac{A_1A_3}{A_2A_3}\right)$, есть окружность;

г) геометрическое место точек A_1 таких, что основной треугольник $A_1A_2A_3$ имеет данную площадь, есть окружность.

Предоставляем читателю самостоятельно доказать все эти предложения.

§ 2. Применение движений и преобразований подобия к решению задач на минимум и максимум

Настоящий небольшой параграф мало связан с остальными. В нём собраны некоторые геометрические задачи на отыскание наименьших и наибольших значений каких-либо величин. Эти задачи решаются различными методами, в большинстве случаев с использованием движений или преобразований подобия; последнее обстоятельство и послужило основанием для включения в книгу этого параграфа.

98. а) Даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от этой прямой. Найдите на прямой l точку X такую, чтобы сумма $AX + BX$ имела наименьшее возможное значение.

б) Даны прямая l и две точки A и B по разные стороны от этой прямой. Найдите на прямой l точку X такую, чтобы разность $AX - BX$ имела наибольшее возможное значение.

99. а) Впишите в данный треугольник ABC треугольник, одна вершина которого совпадает с заданной точкой P на стороне AB и периметр которого имеет наименьшее возможное значение.

б) Впишите в данный треугольник ABC треугольник наименьшего возможного периметра.

100. Впишите в данный четырёхугольник $ABCD$ четырёхугольник наименьшего возможного периметра. Докажите, что эта задача, вообще говоря, не имеет решения в собственном смысле слова (т. е. такого, чтобы получился настоящий четырёхугольник). Однако, если четырёхугольник $ABCD$ может быть вписан в окружность, то задача имеет бесчисленное множество решений, т. е. существует бесчисленное множество четырёхугольников равного периметра, вписанных в $ABCD$, таких, что все другие вписанные в $ABCD$ четырёхугольники имеют больший периметр.

Можно поставить следующую, более общую задачу: *в данный n-угольник вписать n-угольник наименьшего возможного периметра.* Аналогично решениям задач 99 б) и 100 можно показать, что если n — число нечётное, то эта задача имеет, вообще говоря, единственное решение, а если n — чётное, она или не имеет решения, или неопределённа.

101. Впишите в данный треугольник ABC треугольник, стороны которого перпендикулярны к радиусам OA, OB, OC описанной окружности. Выведите из этого построения ещё одно решение задачи 99 б) для остроугольного треугольника.

102. Впишите в данный треугольник ABC треугольник DEF так, чтобы величина $a \cdot EF + b \cdot FD + c \cdot DE$, где a, b, c — заданные положительные числа, имела наименьшее возможное значение.

103. В плоскости треугольника ABC найдите точку M, сумма расстояний которой до вершин треугольника является наименьшей.

104. а) Опишите вокруг данного треугольника ABC равносторонний треугольник так, чтобы перпендикуляры, восставленные в точках A, B, C к сторонам равностороннего треугольника, пересекались в одной точке. Выведите из этого построения ещё одно решение задачи 103.

б) Впишите в данный треугольник ABC равносторонний треугольник так, чтобы перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на стороны равностороннего треугольника, пересекались в одной точке. Выведите из этого построения ещё одно решение задачи 103.

105. а) Пусть ABC — равносторонний треугольник, M — произвольная точка в плоскости этого треугольника. Докажите, что $MA + MC \geqslant MB$. В каком случае $MA + MC = MB$?

б) Выведите из предложения задачи а) ещё одно решение задачи 103.

106. Найдите в плоскости заданного треугольника ABC такую точку M, чтобы величина $a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC$, где a, b, c — данные положительные числа, имела наименьшее возможное значение.

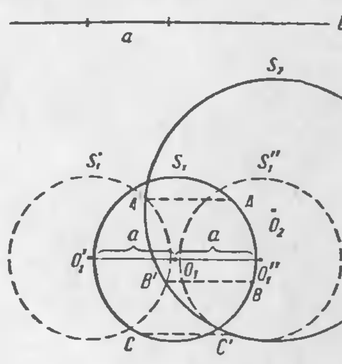
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ДВИЖЕНИЯ

ГЛАВА I
СОБСТВЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 1.

1. Перенесём параллельно окружность S_1 в направлении прямой l на расстояние a в положение S_1'; пусть A' и B' — точки пересечения S_1' с окружностью S_2 (черт. 107). Прямые, проведённые через A' и B' параллельно l, и будут искомыми (отрезки AA' и BB' на черт. 107 равны как раз величине a параллельного переноса). Ещё два решения можно получить, если перенести S_1 параллельно прямой l на расстояние a в обратном направлении в положение S_1''.



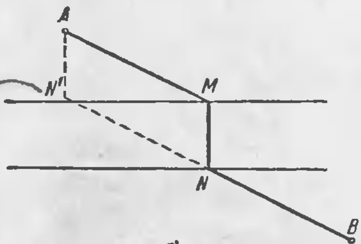
Черт. 107.

В зависимости от числа точек пересечения окружностей S_1' и S_1'' с S_2 задача может иметь четыре, три, два, одно или ни одного решения. [Так, в случае, изображённом на черт. 107, задача имеет три решения.]

2. а) Предполагая задачу решённой, перенесём параллельно отрезок MN в новое положение AN' таким образом, чтобы точка M совпала с точкой A (черт. 108, a). Тогда $AM=N'N$, и следовательно, $AM+NB=N'N+NB$. Поэтому путь $AMNB$ будет кратчайшим тогда и только тогда, когда точки N', N и B лежат на одной прямой.

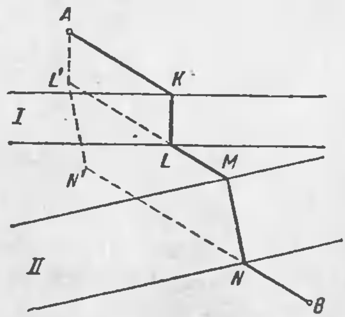
Отсюда следует построение: отложим из точки A отрезок AN', по величине равный ширине реки и перпендикулярный к её направлению; соединим точку N' с точкой B прямой; точка N, полученная при пересечении $N'B$ с более близким к B берегом реки, определит положение моста.

б) Ограничимся для простоты случаем, когда деревни A и B разделены двумя реками. Предполагая, что задача решена и что KL и MN — искомые мосты через реки, перенесём параллельно отрезок KL в новое положение AL' таким обра-



лохо

а)



б)

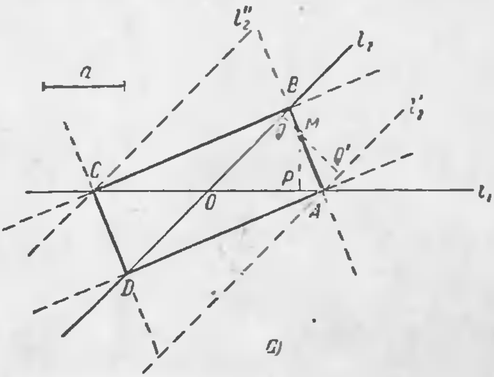
Черт. 108.

зом, чтобы конец его K совпал с точкой A (черт. 108, $б$). Тогда $AK=L'L$ и $AK+LM+NB=L'L+LM+NB$. Если путь $AKLMNB$ является кратчайшим, то кратчайшим является также и путь $L'MNB$ между точками L' и B, разделёнными только второй рекой. Но этот путь строится, как указано в решении задачи а).

Таким образом, приходим к следующему построению: из точки A отложим отрезок AL', равный ширине первой реки и перпендикулярный к её направлению; из точки L' отложим отрезок $L'N'$, равный ширине второй реки и перпендикулярный к её направлению. Соединим точку N' с точкой B прямой $N'B$. Точка N пересечения этой прямой с берегом второй реки, более близким к точке B, определит положение моста MN.

Проведём через точку M прямую параллельно прямой $N'B$ до её пересечения с ближайшим берегом первой реки в точке, которую мы обозначим буквой L. Эта точка определит положение моста KL через первую реку.

3. а) Пусть M — какая-либо точка плоскости такая, что $MP+MQ=a$, где P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки M соответственно на прямые l_1 и l_2 (черт. 109, a). Перенесём прямую l_2 в направлении QM на



Черт. 109, a.

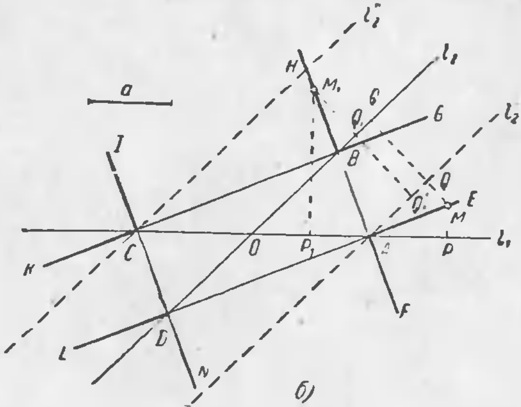
расстояние a. Если l_2' — прямая, получающаяся при этом параллельном переносе, то очевидно, что расстояние MQ' точки M от прямой l_2' равно $a-MQ=MP$. Следовательно, точка M находится на биссектрисе угла, образованного прямыми l_1 и l_2'.

Отсюда видно, что все точки искомого геометрического места лежат на биссектрисах углов, образованных прямой l_1 и прямыми l_2' и l_2'', получающимися из прямой l_2 при параллельном переносе в направлении, перпендикулярном к этой прямой, на расстояние a. Однако не все точки этих четырёх биссектрис принадлежат искомому геометрическому месту. Из черт. 109, a нетрудно усмотреть, что условию задачи удовлетворяют лишь точки, лежащие на сторонах прямоугольника $ABCD$, образованного пересечением четырёх рассматриваемых биссектрис.

б) Пусть M — точка плоскости, удовлетворяющая одному из следующих двух равенств:

$$MP - MQ = a \text{ или } MQ - MP = a,$$

где P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки M соответственно на прямые l_1 и l_2 (на черт. 109, *б* точка M удовлетворяет второму равенству). Перенесём параллельно прямую l_2 в направлении QM на расстояние a. Аналогично решению задачи а) показывается, что точка M равноудалена

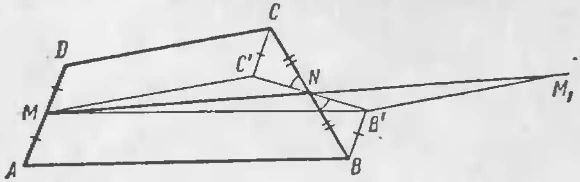


Черт. 109, *б*.

от прямой l_1 и прямой l_2', получающейся в результате параллельного переноса l_2 (см. черт. 109, *б*, где $MQ - MP = a$, $M_1P_1 - M_1Q_1 = a$). Отсюда следует, что все точки искомого геометрического места также лежат на четырёх биссектрисах углов, образованных прямой l_1 и прямыми l_2' и l_2''; однако в данном случае условию задачи удовлетворяют лишь точки, лежащие на продолжениях сторон прямоугольника $ABCD$ (равенству $MP - MQ = a$ удовлетворяют точки ломаных HBG и LDN, а равенству $MQ - MP = a$ — точки ломаных EAF и ICK).

4. Перенесём параллельно стороны AB и DC четырёхугольника $ABCD$ в новые положения MB' и MC' (черт. 110). Образованные при этом четырёхугольники $AMB'B$ и $DMC'C$ будут параллелограммами, и следовательно, $BB' \parallel AM$ и $BB' = AM$,

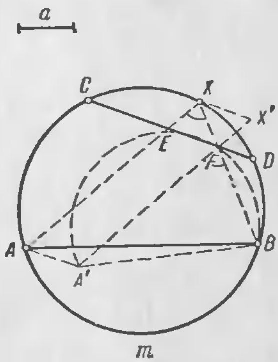
$CC' \parallel DM$ и $CC' = DM$. Но $AM = MD$ (M — середина стороны AD); таким образом, отрезки BB' и CC' параллельны и равны друг другу. А так как, кроме того, $BN = NC$, то $\triangle BNB' = \triangle CNC'$. Отсюда следует, что $B'N = NC'$ и $\angle BNB' =$



Черт. 110.

$= \angle CNC'$, т. е. отрезки $B'N$ и NC' составляют продолжение один другого.

Таким образом, мы построили треугольник $MB'C'$, в котором, по условию задачи, медиана MN равна полусумме боковых сторон MB' и MC' (так как $MB' = AB$, $MC' = DC$). Продолжая медиану MN за точку N на расстояние $NM_1 = MN$ и соединяя M_1 с B', мы получим треугольник MM_1B', у которого сторона $MM_1 = 2\,MN$ равна сумме сторон MB' и $B'M_1 = MC'$, что невозможно. Следовательно, точка B' должна быть расположена на отрезке MM_1. А последнее означает, что $MB' \parallel MN \parallel MC'$; следовательно, $AB \parallel MN$ и $DC \parallel MN$, т. е. четырёхугольник $ABCD$ является трапецией.



Черт. 111.

5. Предположим, что задача решена. Перенесём параллельно отрезок AX в направлении прямой CD на величину $EF = a$ в положение $A'X'$. (черт. 111).

Очевидно, что $A'X'$ проходит через точку F. Далее,

$$\angle A'FB = \angle AXB = \frac{1}{2} \smile AmB;$$ измер

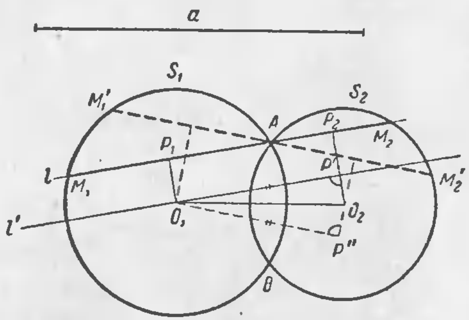
следовательно, угол $A'FB$ мы можем считать известным.

Отсюда вытекает следующее построение: перенесём параллельно точку A в направлении хорды CD на расстояние a

в положение A'. На отрезке $A'B$ построим сегмент, вмещающий угол, равный половине дуги AmB. Пусть F — точка пересечения этого сегмента с хордой CD; пересечение прямой BF с окружностью и определит искомую точку X.

Наибольшее число решений задачи равно двум.

6. а) Предположим, что искомая прямая l пересекает окружности S_1 и S_2 в точках M_1 и M_2 (черт. 112). Опустим на прямую l перпендикуляры O_1P_1 и O_2P_2 из центров O_1 и



Черт. 112.

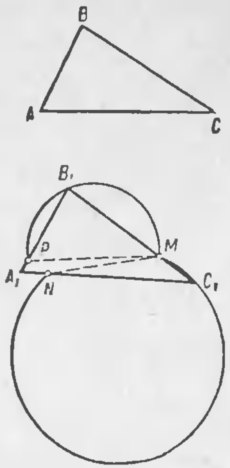
O_2 окружностей S_1 и S_2; в таком случае $AP_1=\frac{1}{2}AM_1$, $AP_2=\frac{1}{2}AM_2$, и следовательно, $P_1P_2=\frac{1}{2}(AM_1+AM_2)=\frac{1}{2}M_1M_2=\frac{1}{2}a$. Перенесём параллельно прямую l в положение l' так, чтобы она прошла через точку O_1; пусть P' есть точка пересечения l' с прямой O_2P_2. В таком случае $O_1P'=P_1P_2=\frac{1}{2}a$, так как четырёхугольник $P_1O_1P'P_2$ — параллелограмм.

Отсюда вытекает следующее построение. На отрезке O_1O_2 как на гипотенузе строим прямоугольный треугольник O_1O_2P' с катетом $O_1P'=\frac{1}{2}a$. Искомая прямая l будет параллельна прямой O_1P'.

Если $O_1O_2>\frac{1}{2}a$, то задача имеет два решения (построение второй прямой, удовлетворяющей условию задачи, намечено пунктиром на черт. 112), если $O_1O_2 = \frac{1}{2}a$ — одно решение и если $O_1O_2 < \frac{1}{2}a$ — ни одного решения.

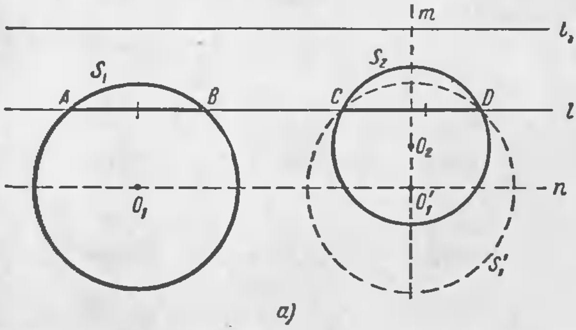
б) Пусть M, N, P — три данные точки, ABC — данный треугольник (черт. 113). Описав на отрезках MN и MP сегменты, вмещающие углы ACB, соответственно ABC, мы придём к задаче: построить прямую B_1C_1, отрезок которой внутри проведённых сегментов имеет данную величину BC, т. е. к задаче а).

Задача может иметь либо два решения, либо одно, либо ни одного (при условии, если указано, какая именно сторона проходит через каждую из заданных точек).



Черт. 113.

7. а) Предположим, что искомая прямая l пересекает окружности S_1 и S_2 в точках A и B, соответственно C и D (черт. 114, a). Перенесём параллельно окружность S_1 в направлении прямой l на расстояние AC; новое её положение



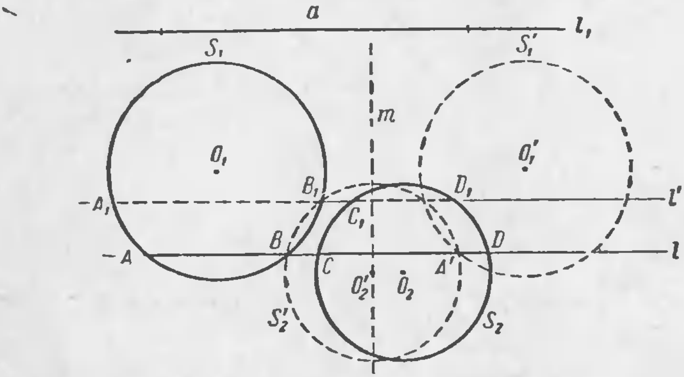
Черт. 114, a.

обозначим S_1'. Так как $AB = CD$, то отрезок AB совместится с CD; поэтому центры O_2 и O_1' окружностей S_2 и S_1' оба будут лежать на перпендикуляре, восставленном к отрезку CD в его середине.

Отсюда вытекает следующее построение. Пусть m — прямая, перпендикулярная к l_1 и проходящая через центр O_2 окружности S_2; n — прямая, параллельная l_1 и проходящая через центр O_1 окружности S_1; O'_1 — точка пересечения этих двух прямых. Перенесём параллельно S_1 в положение S'_1 так, чтобы центр S'_1 совпал с O'_1. Прямая, проходящая через точки пересечения S_2 и S'_1, и будет искомой.

Задача может иметь одно или ни одного решения.

б) Предположим, что искомая прямая l пересекает S_1 и S_2 в точках A и B, соответственно C и D; $AB + CD = a$



$a/2$ 1 сдвиг!

O_1 O'_2

б)

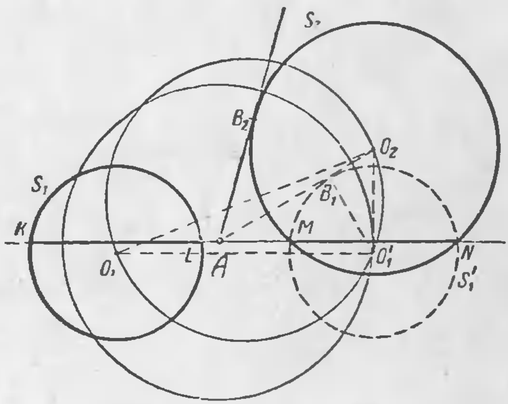
Черт. 114, *б*.

(черт. 114,*б*). Сдвинем окружность S_1 параллельно l на расстояние a в положение S'_1; тогда $AA' = a = AB + CD$, т. е. $BA' = CD$. Поэтому, если мы параллельно сдвинем окружность S_2 в направлении прямой l в положение S'_2 так, чтобы центр O'_2 окружности S'_2 оказался на прямой m, перпендикулярной к отрезку $O_1O'_1$ и проходящей через его середину (O_1 и O'_1 — центры окружностей S_1 и S'_1), то хорда CD окружности S_2 займёт положение BA'.

Отсюда вытекает следующее построение: сдвинем параллельно окружность S_1 в направлении прямой l_1 на расстояние a в положение S'_1; затем параллельно сдвинем окружность S_2 в направлении прямой l, в положение S'_2 так, чтобы её центр оказался на прямой m, перпендикулярной к отрезку O_2O_1' в его середине. Точки пересечения окружностей S_1 и S_2' (на чертеже — точки B и B_1) и определят искомые прямые. Задача может иметь до двух решений в зависимости от числа точек пересечения окружностей S_1 и S_2' (на черт. 114,*б* изображён случай, когда задача имеет два решения).

Аналогично решается задача и в том случае, когда задана **разность** хорд, высекаемых окружностями на искомой прямой.

в) Считая задачу решённой, сдвинем параллельно окружность S_1 в направлении найденной прямой KN в положение S_1', так чтобы отрезок KL совместился с отрезком MN (черт. 115).



Черт. 115.

Таким образом, окружности S_2 и S_1' будут иметь общую хорду MN.

Пусть AB_1 и AB_2 — касательные, проведённые из точки A соответственно к окружностям S_1' и S_2 (B_1 и B_2 — точки касания). Тогда

$$AB_1^2 = AM \cdot AN, \; AB_2^2 = AM \cdot AN$$

и, следовательно,

$$AB_1^2 = AB_2^2.$$

Мы можем определить теперь AO_1' (O_1' — центр окружности S_1'):

$$AO_1' = \sqrt{O_1'B_1^2 + AB_1^2} = \sqrt{r_1^2 + AB_2^2},$$

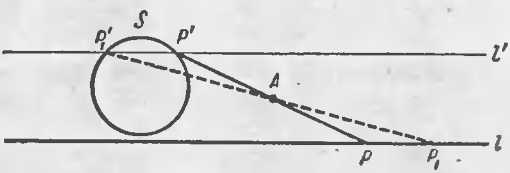
где r_1 — радиус окружности S_1; кроме того, мы знаем, что $\angle O_1O_1'O_2$ — прямой, так как прямая $O_1'O_2$ перпендикулярна к прямой MN, а следовательно, и к прямой O_1O_1'. Это позволяет определить неизвестный нам сначала параллельный перенос, переводящий окружность S_1 в положение S_1'.

Построение осуществляется следующим образом. Из точки A, как из центра, проводим окружность радиуса $\sqrt{r_1^2 + AB_1^2}$; на отрезке O_1O_2, как на диаметре, строим ещё окружность. Пересечение этих двух окружностей определит положение центра O_1' окружности S_1' радиуса r_1. Далее находим точки M и N пересечения окружностей S_2 и S_1' и проводим прямую MN, которая будет искомой. В самом деле, точка A лежит на прямой MN, так как иначе не могло бы иметь места равенство $AB_1^2 = AB_2^2$ (если бы прямая AM пересекала окружности S_2 и S_1' в разных точках N_2 и N_1, то мы имели бы $AB_2^2 = AM \cdot AN_2$, $AB_1^2 = AM \cdot AN_1$). Далее, прямая O_2O_1' перпендикулярна к прямой MN, а прямая O_1O_1' перпендикулярна к прямой O_2O_1', следовательно, $O_1O_1' \parallel MN$, т. е. хорды KL и MN окружностей S_1 и S_1' равноудалены от их центров O_1 и O_1'. Значит, хорды KL и MN равны, что и требовалось доказать.

Наибольшее число решений задачи равно двум.

§ 2

8. Проведём прямую l', симметричную l относительно точки A (черт. 116); пусть P' — точка её пересечения с окружностью S. Прямая $P'A$ будет искомой, так как точка P



Черт. 116.

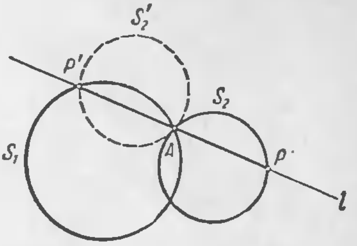
пересечения этой прямой с прямой l симметрична точке P' относительно точки A и, следовательно, $P'A = AP$.

Наибольшее возможное число решений задачи равно двум.

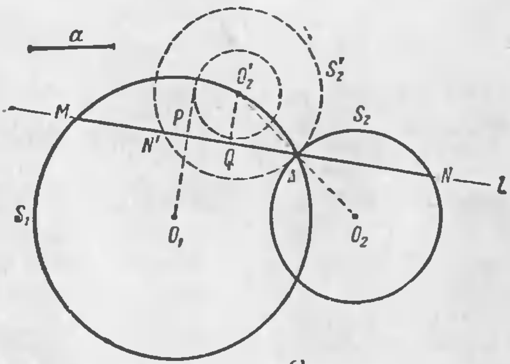
9. а) Построим окружность S'_2, симметричную S_2 относительно точки A (черт. 117,*а*). Пусть P' — отличная от A точка пересечения окружностей S_1 и S'_2. Прямая $P'A$ будет искомой, так как точка P пересечения этой прямой с окружностью S_2 симметрична точке P' относительно A и, следовательно, $P'A = AP$.

Если окружности S_1 и S_2 пересекаются, то задача имеет единственное решение; если же S_1 и S_2 касаются, то задача либо не имеет решения (если радиусы окружностей различны), либо неопределённа (если радиусы окружностей равны).

Примечание. Эта задача является частным случаем задачи 7 в), но решается значительно проще.



а)



б)

Черт. 117.

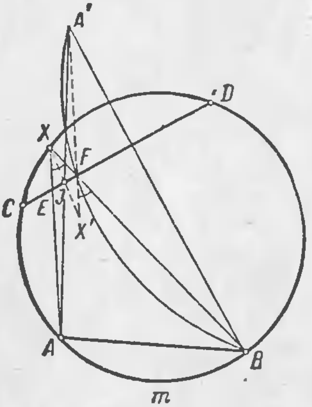
б) Построим окружность S'_2, симметричную S_2 относительно точки A. Пусть MAN — искомая прямая (черт. 117,*б*) и N' — точка пересечения её с окружностью S'_2; тогда $MN' = a$. Из центров O_1 и O'_2 окружностей S_1 и S'_2 опустим перпендикуляры O_1P и O'_2Q на прямую MAN; в таком случае

$$PA = \frac{1}{2}MA,\ QA = \frac{1}{2}N'A \text{ и } PQ = \frac{1}{2}a.$$

Таким образом, расстояние прямой O_1P до точки O_2' равно $\frac{1}{2}a$, т. е. прямая O_1P касается окружности радиуса $\frac{1}{2}a$ с центром в точке O_2'. Построив прямую O_1P, мы без труда построим и прямую $MAN \perp O_1P$.

Наибольшее возможное число решений задачи равно двум.

10. Предположим, что задача решена (черт. 118). Отразим отрезок AX от точки J; пусть $A'X'$ — его новое положение. Так как AX проходит через E, то $A'X'$ проходит через F.



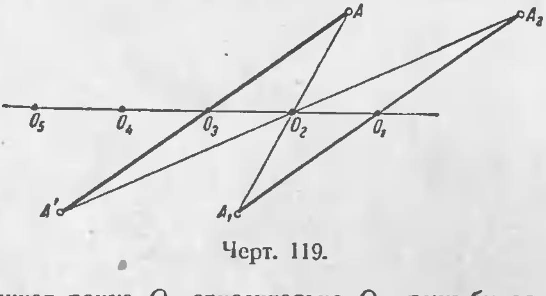
Черт. 118.

Так как $X'A' \parallel AX$, то $\angle X'FB = \angle AXB = \frac{1}{2} \smile AmB$; следовательно, $\angle A'FB$, равный $180° - \angle X'FB$, известен.

Отсюда вытекает следующее построение. Построим точку A', симметричную точке A относительно точки J. На отрезке $A'B$ построим дугу, вмещающую угол, равный $180° - \frac{1}{2} \smile AmB$. Точка пересечения этой дуги с хордой CD определит положение точки F.

Задача имеет единственное решение.

11. Допустим, что фигура F имеет два центра симметрии — O_1 и O_2 (черт. 119). Покажем, что тогда точка O_3,



Черт. 119.

симметричная точке O_1 относительно O_2, тоже будет центром симметрии фигуры F. Действительно, пусть A — произвольная точка фигуры, тогда точки A_1, A_2 и A', где A_1 симметрична A относительно O_2, A_2 симметрична A_1 относительно O_1 и A' симметрична A_2 относительно O_2, будут принадлежать фигуре F (так как O_1 и O_2 — центры симметрии). Но точка A' будет симметрична A относительно O_3; действительно, отрезки AO_3 и O_3A' равны, параллельны и одинаково направлены, так как попарно равны, параллельны и одинаково направлены отрезки AO_3 и O_1A_1, O_1A_1 и A_2O_1, A_2O_1 и O_3A'.

Итак, фигура F вместе с каждой точкой A содержит и точку A', симметричную A относительно O_3; следовательно, O_3 есть центр симметрии F.

Аналогично доказывается, что точка O_4, симметричная O_2 относительно O_3, точка O_5, симметричная O_3 относительно O_4, и т. д. тоже являются центрами симметрии F. Таким образом, мы видим, что если только фигура F имеет два центра симметрии, то она их имеет бесконечное множество.

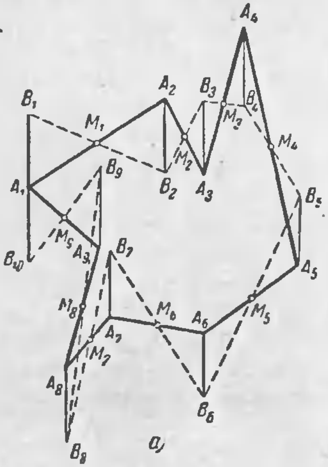
12. а) Отрезок A_nB_n получается из отрезка AB в результате n последовательных симметрий относительно точек O_1, O_2, ..., O_n (n — чётно). Но сумма симметрий с центрами O_1 и O_2 есть параллельный перенос; сумма симметрий с центрами O_3 и O_4 есть также параллельный перенос; сумма симметрий с центрами O_5 и O_6 — это также параллельный перенос; ...; наконец, сумма симметрий с центрами O_{n-1} и O_n тоже представляет собой параллельный перенос. Поэтому A_nB_n получается из AB в результате $n/2$ последовательных параллельных переносов. Но сумма любого числа параллельных переносов есть новый параллельный перенос; таким образом, отрезок A_nB_n получается из отрезка AB параллельным переносом, откуда и следует, что $AA_n = BB_n$.

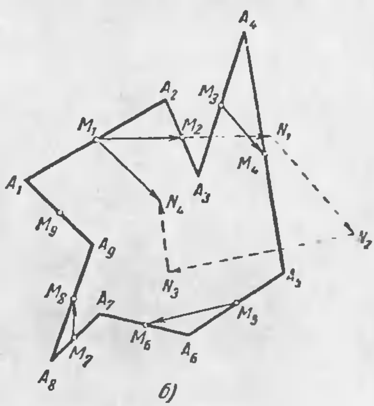
Если n нечётно, то утверждение задачи становится неверным, ибо сумма нечётного числа симметрий относительно точки есть параллельный перенос плюс симметрия относительно точки или, что то же самое, есть просто симметрия относительно точки (см. выше, стр. 29); поэтому, вообще говоря, $AA_n \neq BB_n$ (но $AB_n = BA_n$).

б) Так как сумма нечётного числа симметрий относительно точки есть симметрия относительно точки (см. решение задачи а)), то точка A_n, в которую переходит точка A в результате n последовательных симметрий с центрами O_1, O_2, ..., O_n, может быть получена из A одной симметрией относительно некоторой точки O. Точка A_{2n} получается из A_n в результате суммы т е х ж е n симметрий; следовательно, она может быть получена из A_n симметрией относительно той же точки O. Отсюда и следует, что A_{2n} совпадает с A.

Если n ч ё т н о, то A_n получается из A параллельным переносом; A_{2n} получается из A_n тем же параллельным переносом и, как правило, не будет совпадать с A.

13. П е р в о е р е ш е н и е. Предположим, что задача решена и $A_1A_2 \ldots A_9$ — искомый девятиугольник, $M_1, M_2, \ldots, M_9$ — середины его сторон (черт. 120, *а*; мы считаем в решении, что $n=9$). Выберем произвольную точку B_1 плоскости и отра-





Черт. 120.

зим её последовательно от точек $M_1, M_2, \ldots, M_9$; полученные точки обозначим через $B_2, B_3, \ldots, B_{10}$. Так как отрезок A_2B_2 симметричен A_1B_1 относительно M_1, отрезок A_3B_3 симметричен A_2B_2 относительно $M_2, \ldots$, наконец, отрезок A_1B_{10} симметричен A_9B_9 относительно M_9, то все 10 отрезков A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_9B_9, A_1B_{10}$ равны и параллельны и каждые два соседних из этих отрезков противоположно направлены. Поэтому отрезки A_1B_1 и A_1B_{10} равны, параллельны и противоположно направлены; значит, A_1 есть середина отрезка B_1B_{10}, что позволяет построить эту точку (выбрав произвольно B_1, мы можем построить B_{10}). Точки $A_2, A_2, \ldots, A_9$ находятся последовательным отражением A_1 от $M_1, M_2, \ldots, M_9$.

Задача всегда имеет единственное решение, однако девятиугольник $A_1A_2\ldots A_9$ может получиться невыпуклым или даже самопересекающимся.

В случае чётного n, повторив те же рассуждения, мы получим, что отрезки A_1B_{n+1} и A_1B_1 должны быть равны, параллельны и одинаково направлены, т. е. эти отрезки должны совпадать. Поэтому, если точка B_{n+1} не совпадает с B_1, то задача не имеет решения. Если же B_{n+1} совпадёт с B_1, то отрезки A_1B_1 и A_1B_{n+1} совпадут при любом выборе точки A_1, т. е. за вершину A_1 многоугольника можно принять любую точку плоскости (решение задачи неопределённо).

Второе решение. Вершина A_1 искомого n-угольника в результате последовательных симметрий относительно середин $M_1, M_2, \ldots, M_n$ сторон его переходит в себя, т. е. точка A_1 является неподвижной точкой суммы n симметрий с центрами $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (см. черт. 120, *б*, где изображён случай $n=9$). Если бы n было чётным, то сумма n симметрий относительно точек представляла бы собой параллельный перенос (см. решение задачи 12 а)). Так как параллельный перенос совсем не имеет неподвижных точек, то при n чётном задача, вообще говоря, не имеет решений. Исключением является случай, когда сумма n симметрий представляет собой тождественное преобразование (параллельный перенос на нулевое расстояние), которое оставляет на месте все точки плоскости; в этом случае решение задачи оказывается неопределённым: за вершину A_1 можно принять любую точку плоскости[1]). Если же n нечётно (например, $n=9$), то сумма n симметрий относительно точки представляет собой симметрию относительно точки. Так как симметрия относительно точки имеет единственную неподвижную точку — центр симметрии, то вершина A_1 искомого девятиугольника должна совпадать с центром результирующей симметрии; в этом случае задача имеет единственное решение.

Укажем, как построить центр симметрии — суммы девяти симметрий с известными центрами $M_1, M_2, \ldots, M_9$. Сумма симметрий с центрами M_1 и M_2 есть параллельный перенос в направлении M_1M_2 на расстояние $2M_1M_2$; сумма симметрий с центрами M_3 и M_4 есть параллельный перенос в направлении M_3M_4 на расстояние $2M_3M_4$ и т. д. Таким образом,

---

[1]) Об условиях, которым должны в этом случае удовлетворять точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$, см. примечание в конце решения следующей задачи.

сумма первых восьми симметрий совпадает с суммой четырёх параллельных переносов в направлениях M_1M_2 (или M_1N_1), $M_3M_4(\|N_1N_2)$, $M_5M_6(\|N_2N_3)$ и $M_7M_8(\|N_3N_4)$ на расстояния $2M_1M_2(=M_1N_1)$, $2M_3M_4(=N_1N_2)$, $2M_5M_6(=N_2N_3)$ и $2M_7M_8(=N_3N_4)$ соответственно (см. черт. 120,*б*), которая является параллельным переносом в направлении M_1N_4 на расстояние M_1N_4. Точка A_1 есть центр симметрии, представляющей собой сумму параллельного переноса в направлении M_1N_4 на расстояние M_1N_4 и симметрии относительно точки M_9; для того чтобы найти её, достаточно отложить от точки M_9 отрезок M_9A_1, параллельный N_4M_1 и равный $\frac{1}{2}M_1N_4$ (черт. 120,*б*; ср. также черт. 17 на стр. 29). Зная A_1, мы без труда построим и все остальные вершины искомого девятиугольника.

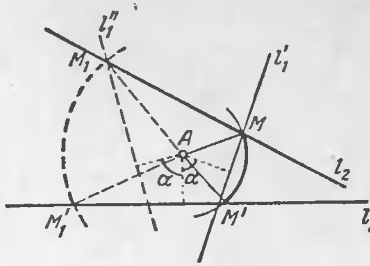
14. а) Если M, N, P и Q — середины сторон произвольного четырёхугольника $ABCD$ (см. черт. 20,*а* на стр. 31), то точка A в результате четырёх последовательных отражений от точек M, N, P, Q перейдёт в себя (ср. со вторым решением задачи 13). Но это возможно только в том случае, если сумма симметрий относительно M, N, P и Q, равная сумме параллельных переносов в направлениях MN и PQ на расстояния $2MN$ и $2PQ$ соответственно, есть тождественное преобразование. Но тогда отрезки MN и PQ равны, параллельны и противоположно направлены, т. е. четырёхугольник $MNPQ$ есть параллелограмм.

б) Аналогично решению задачи а) заключаем, что сумма параллельных переносов в направлениях M_1M_2, M_3M_4 и M_5M_6 на расстояния соответственно $2M_1M_2$, $2M_3M_4$ и $2M_5M_6$ есть тождественное преобразование. Следовательно, существует треугольник, стороны которого параллельны M_1M_2, M_3M_4 и M_5M_6 и равны $2M_1M_2$, $2M_3M_4$ и $2M_5M_6$; но в таком случае существует также треугольник, стороны которого параллельны и равны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

Совершенно так же доказывается, что существует треугольник, стороны которого параллельны и равны M_2M_3, M_4M_5, M_6M_1.

Примечание. Аналогично решению задачи 14 б) можно показать, что для того, чтобы $2n$ точек M_1, M_2, M_3, ..., M_{2n} служили серединами сторон некоторого $2n$-угольника, необходимо и достаточно, чтобы существовал n-угольник, стороны которого были бы параллельны и равны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, ..., $M_{2n-1}M_{2n}$; при этом будет существовать также и n-угольник, стороны которого параллельны и равны M_2M_3, M_4M_5, ..., $M_{2n}M_1$.

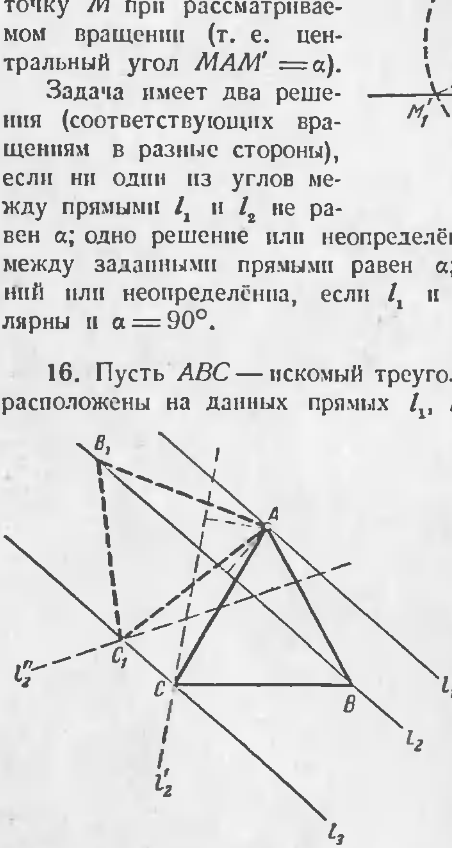
15. Повернём прямую l_1 вокруг точки A на угол α в положение l'_1. Пусть M есть точка пересечения l'_1 с прямой l_2 (черт. 121). Окружность с центром в точке A, проходящая через точку M, и будет искомой, так как точка M' пересечения этой окружности с прямой l_1 переходит в точку M при рассматриваемом вращении (т. е. центральный угол $MAM' = \alpha$).



Черт. 121.

Задача имеет два решения (соответствующих вращениям в разные стороны), если ни один из углов между прямыми l_1 и l_2 не равен α; одно решение или неопределённа, если один из углов между заданными прямыми равен α; вовсе не имеет решений или неопределённа, если l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны и $\alpha = 90°$.

16. Пусть ABC — искомый треугольник, вершины которого расположены на данных прямых l_1, l_2 и l_3 (черт. 122). Повернём прямую l_2 вокруг точки A на угол $60°$ в направлении от B к C; тогда точка B перейдёт в точку C.



Черт. 122.

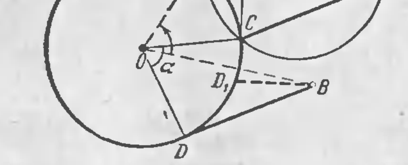
Отсюда вытекает следующее построение. Выберем произвольно точку A на прямой l_1 и повернём прямую l_2 вокруг A на угол $60°$. Точка пересечения полученной прямой l'_2 и прямой l_3 определит вершину C искомого треугольника. Задача имеет два решения, так как прямую l_2 можно повернуть на $60°$ в двух направлениях.

Задача о построении равностороннего треугольника, вершины которого лежат на трёх данных концентрических окружностях, решается аналогично.

Примечание. Если вместо A взять другую точку A' прямой l_1, то новый чертёж будет получаться из черт. 122 движением (а именно — параллельным переносом в направлении l_1 на расстояние AA'). Но такие чертежи в геометрии не различаются (см. введение к части первой). Именно поэтому мы считаем, что решение задачи не зависит от выбора точки A на прямой l_1 (и задача имеет всего два решения, хотя точку A можно выбирать бесчисленным числом способов). Если бы прямые l_1, l_2 и l_3 не были параллельны, то задача решалась бы совершенно аналогично; однако здесь пришлось бы уже считать, что она имеет бесконечно много решений, отвечающих различным выборам точки A на прямой l_1 (ибо треугольники, соответствующие разным выборам точки A, не были бы уже равны).

Совершенно так же задача о построении равностороннего треугольника ABC, вершины которого лежат на трёх концентрических окружностях S_1, S_2 и S_3, может иметь не больше четырех решений (здесь чертежи, соответствующие разным выборам точки A на окружности S_1, тоже будут одинаковыми — они будут получаться один из другого вращением вокруг общего центра S_1, S_2 и S_3). Если же S_1, S_2 и S_3 — произвольные окружности, то соответствующая задача уже будет неопределённой (различным выборам точки A на окружности S_1 будут отвечать существенно разные решения).

17. Предположим, что дуга CD найдена (черт. 123). Повернём отрезок BD вокруг центра O окружности S на угол α, он перейдёт в отрезок $B'C$, образующий с отрезком AC угол $ACB' = \alpha$.

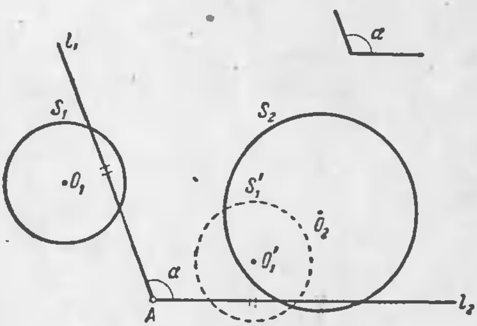


Черт. 123.

Отсюда следует построение: повернём точку B вокруг O на угол α в положение B'. Через точки A и B' проведём дугу окружности, вмещающую угол α. Пересечение этой дуги с окружностью S определит положение точки C.

Задача может иметь до четырех решений (дуга с окружностью может пересекаться в двух точках, и точку B вокруг O можно повернуть в двух направлениях).

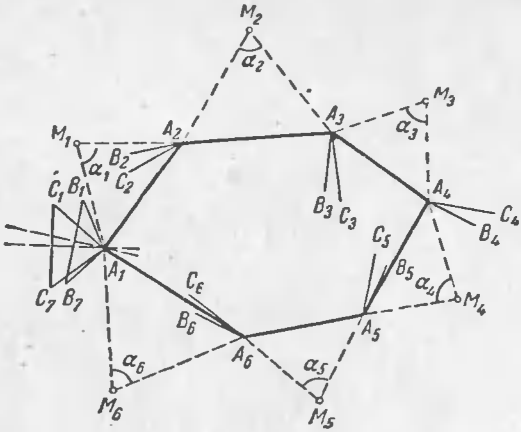
18. Предположим, что задача решена. Повернём окружность S_1 вокруг A на угол α в положение S_1' (черт. 124). Окружности S_2 и S_1' будут высекать на прямой l_2 равные хорды. Поэтому задача сведётся к задаче 7 в) (стр. 22).



Черт. 124.

Задача может иметь до четырех решений (так как S_1 можно поворачивать вокруг A в двух направлениях).

19. Первое решение (ср. с первым решением задачи 13). Предположим, что задача решена и $A_1A_2 \ldots A_n$ — искомый n-угольник (см. черт. 125, где $n=6$). Выберем на плоскости произвольную точку B_1. При последовательных вращениях вокруг точки M_1 на угол α_1, вокруг точки M_2 на угол α_2 и т. д., наконец, вокруг точки M_n на угол α_n отрезок A_1B_1 перейдёт в отрезок A_2B_2, A_2B_2 в $A_3B_3, \ldots, A_nB_n$ в A_1B_{n+1}. Все эти отрезки равны, поэтому вершина A_1 n-угольника равноудалена от точек B_1 и B_{n+1} (где B_{n+1} получается из B_1 в результате суммы n известных вращений). Выбрав затем на плоскости вторую точку C_1 и повернув её последовательно вокруг $M_1, M_2, \ldots, M_n$ на углы соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, мы получим ещё одну пару точек C_1 и C_{n+1}, от которых A_1 также равноудалена. Поэтому вершину A_1 n-угольника можно найти как точку пересечения перпендикуляров, восставленных к отрезкам B_1B_{n+1} и C_1C_{n+1} в их серединах; после этого, повернув точку A_1 на угол α_1 вокруг M_1, мы получим точку A_2; повернув A_2 на угол α_2 вокруг точки M_2, мы получим A_3, и т. д. Задача имеет единственное решение, если перпендикуляры к отрезкам B_1B_{n+1} и C_1C_{n+1} в их серединах пересекаются (т. е. отрезки B_1B_{n+1} и C_1C_{n+1} не параллельны); если эти перпен-



Черт. 125.

дикуляры параллельны, то задача не имеет решения, а если они совпадают, то решение задачи будет неопределённым.

Полученный в решении задачи многоугольник может оказаться невыпуклым или даже самопересекающимся.

Второе решение (ср. со вторым решением задачи 13). Вершина A_1 искомого n-угольника является неподвижной точкой суммы n вращений с центрами M_1, M_2, ..., M_n и углами поворота α_1, α_2, ..., α_n (эти вращения переводят A_1 в A_2, A_2 в A_3, A_3 в A_4 и т. д. и, наконец, A_n в A_1). Но сумма n вращений на углы α_1, α_2, ..., α_n представляет собой вращение на угол $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$, если $\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ $\ldots+\alpha_n$ не кратно $360°$, и параллельный перенос в противном случае (это следует из теоремы о сумме двух вращений). Единственной неподвижной точкой вращения является центр вращения. Поэтому, если $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ не кратно $360°$, то вершину A_1 находим как центр вращения, равного сумме вращений вокруг точек M_1, M_2, ..., M_n на углы α_1, α_2, ..., α_n, применяя несколько раз указанное в тексте построение центра вращения, являющегося суммой двух известных вращений[1]). В этом случае задача всегда имеет единственное решение.

Параллельный перенос неподвижных точек не имеет. Поэтому, если $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ кратно 360°, то задача, вообще говоря, не имеет решения. Однако в частном случае, когда сумма вращений вокруг точек M_1, M_2, ..., M_n на углы α_1, α_2, ..., α_n ($\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ кратно 360°) представляет собой тождественное преобразование, решение задачи будет неопределённым (за вершину A_1 можно принять любую точку плоскости).

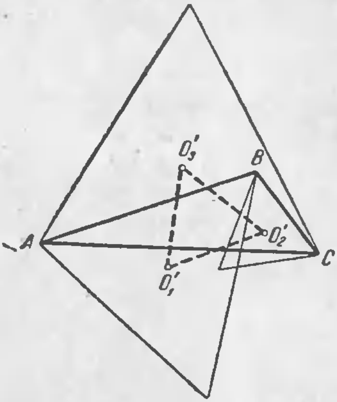
Так, если $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=180°$ (случай, разобранный в задаче 13), то решение задачи является единственным при n нечётном и отсутствует или неопределённо при n чётном.

20. а) Рассмотрим последовательные вращения с центрами O_1, O_2, O_3 на угол 120° (см. черт. 29 в тексте). Первое из этих вращений переводит A в B, второе — B в C и, наконец, третье — C в A.

Таким образом, точка A есть неподвижная точка суммы трёх рассматриваемых вращений. Но сумма трёх вращений на углы 120°, вообще говоря, представляет собой параллельный перенос и, значит, не имеет неподвижных точек; поэтому из того, что точка A остаётся на месте, следует, что эта сумма является тождественным преобразованием (параллельным переносом на нулевое расстояние). Сумма первых двух вращений представляет собой вращение на угол 240° вокруг точки O, в которой пересекаются прямые, проходящие соответственно через O_1 и O_2 и образующие с O_1O_2 углы в 60°; следовательно, треугольник O_1O_2O правильный. Так как сумма этого последнего вращения и вращения с центром O_3 на угол 120° должна представлять собой тождественное преобразование, то точка O должна совпадать с O_3. Отсюда следует, что треугольник $O_1O_2O_3$ правильный, что нам и требовалось доказать.

[1]) Может случиться, что в процессе построения нам придётся находить центр вращения, равного сумме параллельного переноса и вращения. По этому поводу см. текст, напечатанный мелким шрифтом, на стр. 38 или на стр. 52.

Точно так же показывается, что центры O_1', O_2', O_3' правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника ABC по ту же сторону от сторон, по которую расположен сам треугольник, тоже образуют правильный треугольник (черт. 126).



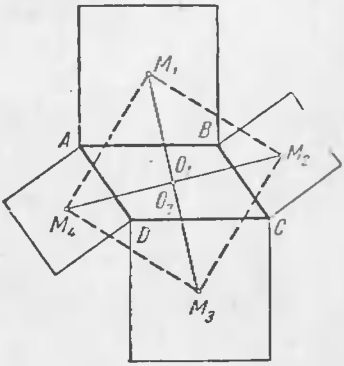
Черт. 126.

б) Решение задачи б) аналогично решению задачи а). Из того, что точка A переходит в себя в результате суммы трёх вращений с центрами B_1, A_1 и C_1 и углами поворота β, α и γ ($\alpha+\beta+\gamma=360°$), следует, что эта сумма вращений представляет собой тождественное преобразование. Но последнее возможно только в том случае, если C_1 совпадает с центром вращения, являющегося суммой вращений с центрами B_1 и A_1 и углами поворота β и γ, т. е. если C_1 есть точка пересечения прямых, проходящих через B_1 и A_1 и образующих с прямой B_1A_1 углы $\frac{\beta}{2}$ и $\frac{\alpha}{2}$ соответственно. Отсюда и следует утверждение задачи.

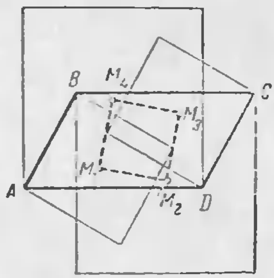
Точно так же доказывается, что вершины A_1', B_1', C_1' равнобедренных треугольников ABC_1', BCA_1' и ACB_1' с углами при вершинах, соответственно равными α, β и γ ($\alpha+\beta+\gamma=360°$), построенных по ту же сторону от сторон треугольника ABC, по которую расположен сам треугольник, образуют треугольник с углами $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$.

21. Последовательные вращения в одном направлении с центрами A_1, B_1 и M и углами поворота 60°, 60° и 240° переводят точку B в себя (см. черт. 30 в тексте). Поэтому сумма этих трёх вращений представляет собой тождественное преобразование и, следовательно, сумма первых двух вращений представляет собой вращение с центром M. Отсюда и вытекает утверждение задачи (ср. с решением задачи 20).

22. Сумма четырёх вращений с центрами M_1, M_2, M_3 и M_4 на $90°$ каждое переводит вершину A параллелограмма в себя. Но это возможно только в том случае, если сумма этих вращений представляет собой тождественное преобразование (ср. с решениями задач 20, 21). Сумма вращений с центрами M_1 и M_2 есть симметрия (вращение на $180°$) с центром в точке O_1 такой, что прямые M_1O_1 и M_2O_1 образуют с M_1M_2 углы в $45°$; сумма вращений с центрами M_3 и M_4 есть симметрия с центром в точке O_2 такой, что прямые M_3O_2 и M_4O_2 образуют с M_3M_4 углы в $45°$ (черт. 127, *а*). Так как сумма двух симметрий относительно точек O_1 и O_2 должна



а)



б)

Черт. 127.

представлять собой тождественное преобразование, то O_2 совпадает с O_1 и $O_1M_1M_2$, $O_1M_3M_4$ — два равнобедренных прямоугольных треугольника с общей вершиной O_1. Далее, так как параллелограмм $ABCD$ имеет центр симметрии O — точку пересечения диагоналей, то и весь черт. 127, *а* (а значит, и четырёхугольник $M_1M_2M_3M_4$) должен иметь центр симметрии в той же точке O. Отсюда вытекает, что $M_1M_2 = M_3M_4$ и O_1 совпадает с O; следовательно, треугольники OM_1M_2 и OM_3M_4 равны и $\angle M_2OM_3 = \angle M_4OM_1$, т. е. $M_1M_2M_3M_4$ есть квадрат.

Точно так же доказывается, что центры квадратов, построенных на сторонах произвольного параллелограмма по ту же сторону от сторон, по которую расположен сам параллелограмм, тоже образуют квадрат (черт. 127, *б*).

23. Рассмотрим четыре вращения с центрами A, B, C и D и углами поворота, равными 90° (см. черт. 32 в тексте). Сумма первых двух вращений представляет собой симметрию относительно точки O_1; сумма последних двух вращений — симметрию относительно точки O_3, совпадающей с O_1 (ср. с решением задачи 22). Поэтому сумма всех вращений есть тождественное преобразование (сумма двух симметрий с общим центром).

Сумма тех же четырёх вращений, взятых в ином порядке: сначала второе, затем третье, затем четвёртое и, наконец, первое, тоже есть тождественное преобразование. Действительно, пусть первое вращение переводит произвольную точку M плоскости в какую-то точку M'; второе — M' в M''; третье — M'' в M'''; четвёртое — M''' снова в M; тогда сумма рассматриваемых вращений, взятых в новом порядке, переводит точку M' снова в M', что возможно только в том случае, если эта сумма представляет собой тождественное преобразование.

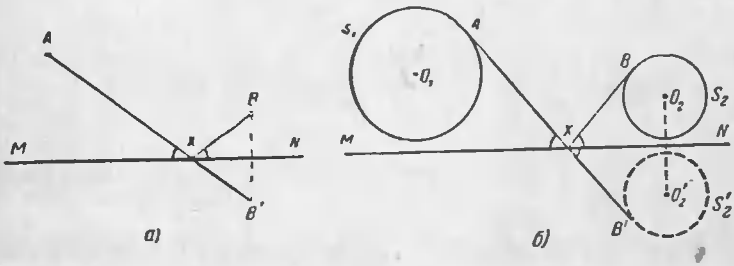
Сумма второго и третьего вращений есть симметрия с центром в вершине O_2 равнобедренного прямоугольного треугольника BO_2C; сумма четвёртого и первого вращений есть симметрия с центром в вершине O_4 равнобедренного прямоугольного треугольника DO_4A. Так как сумма всех четырёх вращений есть тождественное преобразование, то O_4 совпадает с O_2. А это нам и требовалось доказать.

ГЛАВА II

СИММЕТРИИ

§ 1

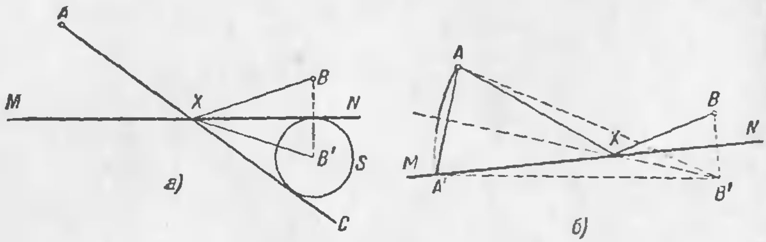
24. а) Предположим, что точка X найдена, т. е. $\angle AXM = \angle BXN$ (черт. 128, *а*). Пусть B' — точка, симметричная B относительно прямой MN; тогда $\angle B'XN = \angle BXN = \angle AXM$, т. е. точки A, X, B' лежат на одной прямой. Отсюда следует, что X можно найти как точку пересечения прямых MN и AB'.



Черт. 128.

б) Предположим, что точка X найдена. Пусть S_2' — окружность, симметричная S_2 относительно прямой MN (черт. 128, *б*). Если XA, XB и XB' — касательные, проведённые из точки X к S_1, S_2 и S_2', то $\angle B'XN = \angle BXN = \angle AXM$, т. е. точки A, X и B' лежат на одной прямой. Поэтому X можно найти как точку пересечения прямой MN с общей касательной AB' окружностей S_1 и S_2'. Задача может иметь до четырёх решений (к двум окружностям можно провести до четырёх общих касательных).

в) Первое решение. Пусть B' — точка, симметричная B относительно MN, XC — продолжение отрезка AX за точку X (черт. 129, *а*). Тогда $\angle CXN = 2\angle BXN = 2\angle B'XN$, следовательно, луч XB' является биссектрисой угла NXC. Поэтому прямая AXC касается окружности S с центром B', касающейся MN; точку X можно найти как пересечение



Черт. 129.

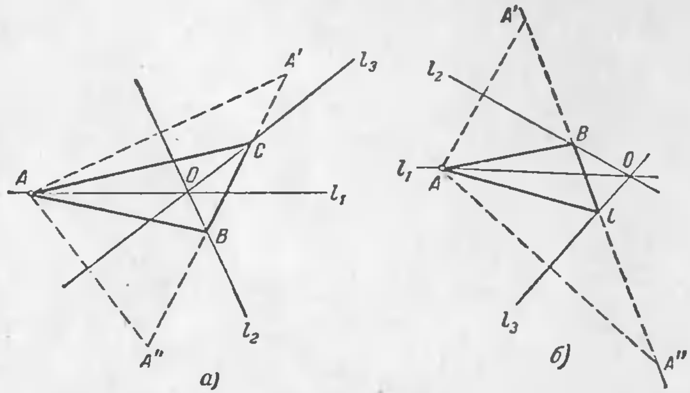
прямой MN с касательной, проведённой из A к окружности S.

Второе решение. Пусть A' — точка, симметричная точке A относительно прямой $B'X$ (обозначения те же, что и в первом решении). $B'X$ есть биссектриса угла AXM, поэтому точка A' лежит на прямой XM, причём $B'A = B'A'$ (черт. 129, *б*). A' легко найти, сделав на прямой MN засечку с центром в B' и радиусом $B'A$. Точку X находим как пересечение перпендикуляра, опущенного из B' на AA', с прямой MN.

25. а) Пусть треугольник ABC построен и прямая l_2 — биссектриса угла B, а l_3 — биссектриса угла C (черт. 130, *а*). Тогда прямые BA и BC симметричны относительно прямой l_2, а прямые BC и AC симметричны относительно l_3, поэтому точки A' и A'', симметричные A относительно l_2 и l_3, лежат на прямой BC.

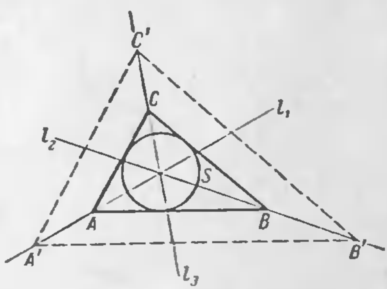
Таким образом, мы приходим к следующему построению. Найдём точки A' и A'', симметричные точке A относительно прямых l_2 и l_3. Точки пересечения прямой $A'A''$ с прямыми l_2 и l_3 определят вершины B и C треугольника ABC.

Если прямые l_2 и l_3 взаимно перпендикулярны, то построенная прямая $A'A''$ проходит через точку пересечения заданных прямых и задача не имеет решения; если прямая l_1 перпендикулярна к одной из прямых l_2 и l_3, то прямая $A'A''$ будет параллельна другой из них и задача опять не имеет решения. В том случае, когда никакие две из заданных пря-



Черт. 130.

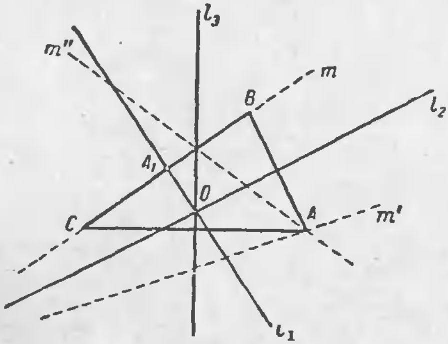
мых не перпендикулярны друг к другу, задача имеет единственное решение; однако лишь в том случае, когда каждая из трёх прямых l_1, l_2, l_3 заключена внутри тупого угла, образованного двумя другими, эти три прямые будут служить биссектрисами в н у т р е н н и х углов построенного треугольника ABC; если же, например, l_1 проходит внутри острого угла, образованного l_2 и l_3, то эти две последние прямые будут служить биссектрисами внешних углов построенного треугольника (черт. 130, *б*). Предоставляем читателю самому дать доказательство.



Черт. 131.

б) Выберем на одной из прямых произвольную точку A' и построим треугольник $A'B'C'$, для которого прямые l_1, l_2 и l_3 являются биссектрисами внутренних углов (см. задачу а)). Проведём касательные к S, параллельные сторонам треугольника $A'B'C'$ (черт. 131). Полученный треугольник будет искомым. Задача имеет единственное решение, если каждая из трёх прямых l_1, l_2, l_3 проходит внутри тупого угла, образованного двумя другими; если же одна из них проходит внутри острого угла, образованного двумя другими, то для построенного треугольника данная окружность явится вневписанной.

в) Предположим, что задача решена, т. е. искомый треугольник ABC построен (черт. 132). Так как точка A симметрична точке B относительно прямой l_2, то она лежит на прямой, симметричной прямой BC относительно l_2. А так как



Черт. 132.

A симметрична C относительно l_3, то она лежит также на прямой, симметричной BC относительно l_3.

Таким образом, мы приходим к следующему построению. Проведём через точку A_1 прямой l_1 прямую m перпендикулярно к прямой l_1. Затем строим прямые m' и m'', симметричные m относительно прямых l_2 и l_3. Точка пересечения m' и m'' и будет являться вершиной A искомого треугольника; вершины B и C треугольника ABC будут симметричны этой вершине относительно прямых l_2 и l_3 (черт. 132).

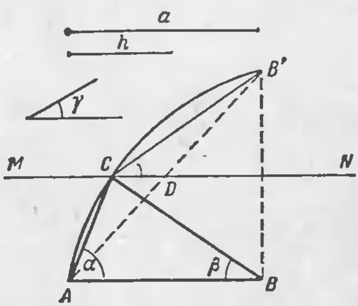
Если прямые l_2 и l_3 взаимно перпендикулярны, то прямые m' и m'', получаемые из прямой m симметриями относительно l_2 и l_3, будут параллельны (если точка A_1 не совпадает с точкой O пересечения прямых l_1, l_2 и l_3) или совпадут (если A_1 совпадает с O). В первом случае задача вовсе не будет иметь решений, во втором — решение задачи будет неопределённым. Во всех остальных случаях задача имеет единственное решение.

26. а) Предположим, что задача решена. Проведём через вершину C прямую MN, параллельную AC, и построим точку B', симметричную B относительно прямой MN (черт. 133). Обозначим углы при основании AB через α и β (будем считать, что $\alpha > \beta$), тогда

$$\angle ACN = 180° - \alpha, \quad \angle B'CN = \angle BCN = \beta,$$

$$\angle ACB' = (180° - \alpha) + \beta = 180° - (\alpha - \beta) = 180° - \gamma.$$

Отсюда вытекает следующее построение. Отложим отрезок $AB = a$, проведём параллельно AB прямую MN на расстоянии h от AB, построим точку B', симметричную B относительно MN. На отрезке AB' построим дугу, вмещающую



Черт. 133.

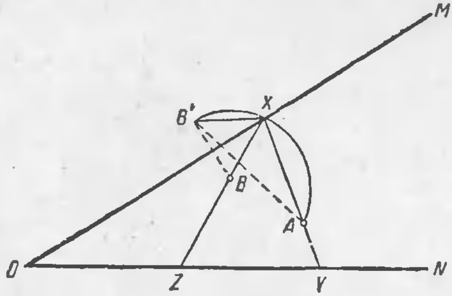
угол $180° - \gamma$. Пересечение этой дуги с прямой MN определит положение вершины C треугольника. Задача имеет единственное решение.

б) Предположим, что задача решена. Проведём такое же построение, как в предыдущей задаче (черт. 133). Так как

$$\angle ACB' = 180° - \gamma,$$

то мы можем построить треугольник ACB' по двум сторонам AC и $CB' = BC$ и углу $180° - \gamma$ между ними. MN совпадает с медианой CD этого треугольника (ибо MN — средняя линия треугольника ABB'), точка B симметрична B' относительно медианы CD. Задача имеет одно решение.

27. Предположим, что задача решена, и пусть B' — точка, симметричная B относительно OM (черт. 134). Имеем $\angle B'XA = \angle B'XB + \angle ZXY$; но $\angle B'XB = 2\angle OXZ = 2(\angle XZY - \angle MON)$ (ибо $\angle XZY$ есть внешний угол треугольника XOZ). Следовательно,

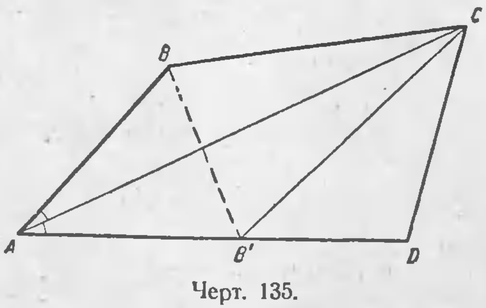


Черт. 134.

$$\angle B'XA = 2\angle XZY - 2\angle MON + \angle YXZ = \\ = \angle XZY + \angle XYZ + \angle YXZ - 2\angle MON = \\ = 180^\circ - 2\angle MON$$

известен. Отсюда X находим как точку пересечения луча OM с дугой, построенной на отрезке AB' и вмещающей угол $180^\circ - 2\angle MON$. Задача имеет одно решение.

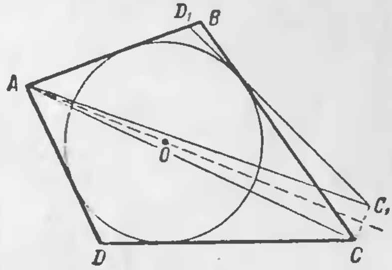
28. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ построен. Пусть B' — точка, симметричная вершине B относительно диагонали AC (черт. 135). Так как $\angle BAC = \angle DAC$, то точка B' лежит на прямой AD. В треугольнике $B'DC$ известны все сто-



Черт. 135.

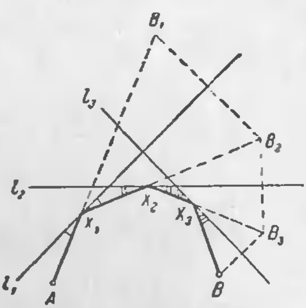
роны: DC, $B'C = BC$, $DB' = AD - AB' = AD - AB$. Построим его; затем найдём вершину A (известна сторона AD) и вершину B как точку, симметричную B' относительно AC. Задача имеет единственное решение, если $AD \neq AB$; не имеет решения, если $AD = AB$, $CD \neq CB$; неопределённа, если $AD = AB$, $CD = CB$.

б) Предположим, что задача решена (черт. 136), и пусть треугольник AD_1C_1 симметричен треугольнику ADC относительно прямой AO (O —центр окружности, вписанной в четырёхугольник). Очевидно, точка D_1 лежит на прямой AB, а сторона D_1C_1 касается вписанной в четырёхугольник $ABCD$ окружности. Отложив на произвольной прямой известные отрезки AB и $AD_1 = AD$, мы сможем найти прямые BC и D_1C_1 (так как мы знаем $\angle ABC$ и $\angle AD_1C_1 = \angle ADC$). После этого мы можем построить вписанную в $ABCD$ окружность (эта окружность касается прямых AB, BC и D_1C_1), а затем и стороны AD и DC четырёхугольника, симметричные соответственно AD_1 и D_1C_1 относительно прямой AO.



Черт. 136.

Задача имеет единственное решение, если $\angle ADC \neq \angle ABC$; не имеет решения, если $\angle ADC = \angle ABC$, $AD \neq AB$; неопределённа, если $\angle ADC = \angle ABC$, $AD = AB$.



Черт. 137.

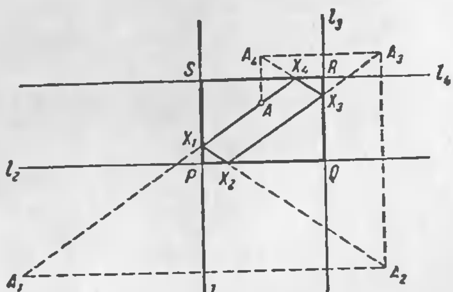
29. а) Предположим, что задача решена, т. е. на l_1, l_2, ..., l_n найдены точки X_1, X_2, ..., X_n такие, что $AX_1X_2 \ldots X_nB$ есть путь бильярдного шара (на черт. 137 изображён случай, когда $n = 3$). Легко видеть, что точка X_n является точкой пересечения прямой l_n с прямой $X_{n-1}B_n$, где B_n симметрична B относительно l_n (см. решение задачи 24 а)),

т. е. точки B_n, X_n, X_{n-1} лежат на одной прямой. Но тогда точка X_{n-1} является точкой пересечения прямой l_{n-1} с прямой $X_{n-2}B_{n-1}$, где B_{n-1} симметрична точке B_n относительно прямой l_{n-1}. Аналогично показывается, что точка X_{n-2} — точка пересечения l_{n-2} с прямой $X_{n-3}B_{n-2}$, где B_{n-2} симметрична B_{n-1} относительно l_{n-2}; точка X_{n-3} — точка пересечения l_{n-3} с прямой $X_{n-4}B_{n-3}$, где B_{n-3} симметрична B_{n-2} относительно l_{n-3}, и т. д.

Таким образом, приходим к следующему построению. Отражаем последовательно точку B относительно прямых l_n, $l_{n-1}, \ldots, l_1$; получаем точки $B_n, B_{n-1}, \ldots, B_1$. Точка X_1, определяющая направление, в каком должен быть пущен шар из точки A, находится как пересечение прямой l_1 с прямой AB_1.

После этого нетрудно, используя точки $B_2, B_3, \ldots, B_n$ и X_1, найти точки $X_2, X_3, \ldots, X_n$.

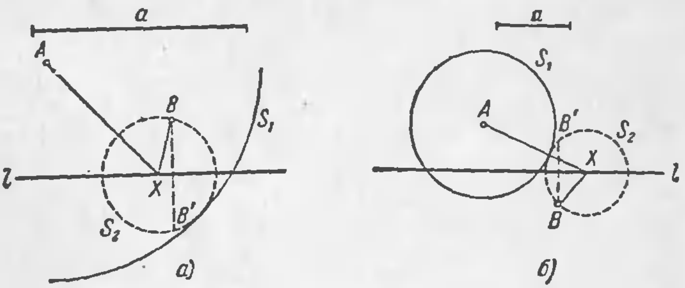
б) В рассматриваемом случае путь шара $AX_1X_2X_3X_4A$ представляет собой параллелограмм, вписанный в прямоугольник $PQRS$, причём стороны параллелограмма параллельны диагоналям прямоугольника (черт. 138). Общий путь шара



Черт. 138.

равен расстоянию AA_1. Спроектировав отрезок AA_1 на стороны прямоугольника, мы убедимся, что эти проекции в два раза больше соответствующих сторон прямоугольника, откуда следует, что отрезок AA_1 в два раза больше диагонали прямоугольника. Второе утверждение задачи следует из того, что отрезки AX_1 и X_4A, как легко усмотреть из черт. 138, составляют одну прямую.

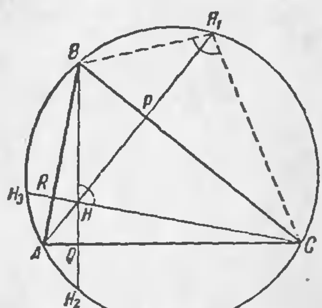
30. а) Предположим, что задача решена. Проведём окружность S_1 с центром в точке A, радиуса a и окружность S_2 с центром в точке X, радиуса XB (черт. 139, *а*). Очевидно, что эти две окружности касаются в точке, лежащей на прямой AX. Так как окружность S_2 проходит через точку B, то



Черт. 139.

она проходит и через точку B', симметричную B относительно прямой l. Таким образом, задача сводится к построению окружности S_2, проходящей через известные точки B и B' и касающейся окружности S_1, т. е. к задаче 49 б) из § 1 гл. I второй части. Центр X окружности S_2 и будет искомой точкой.

б) Предположим, что задача решена, и пусть S_1 — окружность с центром в точке A, радиуса a, а S_2 — окружность с центром в точке X, радиуса BX (черт. 139, *б*). Окружности S_1 и S_2 касаются в точке, лежащей на прямой AX. Кроме того, окружность S_2 проходит через точку B', симметричную B относительно l. Поэтому задача опять сводится к той же задаче 49 б).



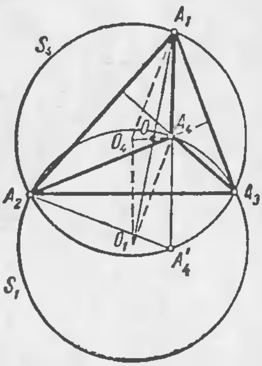
Черт. 140.

31. а) Пусть точка H_1 симметрична точке H относительно стороны BC (черт. 140). Обозначим через P, Q, R основания высот. Имеем $\angle BH_1C = \angle BHC$ (ибо $\triangle BH_1C = \triangle BHC$). Но $\angle BHC = \angle RHQ$, а $\angle RHQ + \angle RAQ = 180°$; поэтому $\angle BH_1C + \angle BAC = 180°$, откуда и следует утверждение задачи.

б) Предположим, что треугольник ABC построен. Точки H_1, H_2 и H_3 лежат на окружности, описанной около треугольника ABC (см. задачу а)). Так как $\angle BRC = \angle BQC$ $(=90^\circ)$, то $\frac{\smile BC + \smile AH_3}{2} = \frac{\smile BC + \smile AH_2}{2}$, т. е. $\smile AH_3 = \smile AH_2$. Аналогично доказывается, что $\smile BH_1 = \smile BH_3$, $\smile CH_1 = \smile CH_2$. Отсюда вытекает, что вершины A, B и C искомого треугольника совпадают с серединами дуг H_2H_3, H_3H_1 и H_1H_2 окружности, описанной около треугольника $H_1H_2H_3$. Задача имеет единственное решение, если точки H_1, H_2 и H_3 не лежат на одной прямой, и не имеет решения в противном случае.

32. а) Очевидно. Так, например, высотами треугольника $A_2A_3A_4$ являются прямые $A_1A_4 \perp A_2A_3$, $A_1A_3 \perp A_2A_4$ и $A_1A_2 \perp A_3A_4$; точкой пересечения высот является точка A_1.

б) Пусть A_4' — точка, симметричная точке A_4 относительно прямой A_2A_3 (черт. 141). Эта точка лежит на окружности S_4, описанной вокруг треугольника $A_1A_2A_3$ (см. задачу 31 а)). Таким образом, окружность, описанная вокруг треугольника $A_2A_4'A_3$, совпадает с S_4; отсюда вытекает, что окружность S_1, описанная вокруг треугольника $A_2A_3A_4$, равна S_4 (окружности S_1 и S_4 симметричны относительно A_2A_3). Аналогично доказывается, что окружности S_2 и S_3 тоже равны окружности S_4.



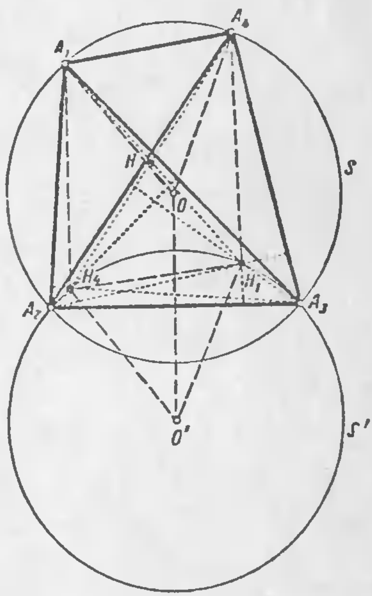
Черт. 141.

в) Из четырёх треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_4$ и $A_2A_3A_4$ один обязательно будет остроугольным; действительно, если треугольник $A_2A_3A_4$ тупоугольный (угол A_4 тупой), то треугольник $A_2A_3A_1$, где A_1 — точка пересечения высот треугольника $A_2A_3A_4$, будет остроугольным. Итак, пусть треугольник $A_1A_2A_3$ — остроугольный, точка A_4 расположена внутри треугольника $A_1A_2A_3$.

Рассмотрим четырёхугольник $A_1A_4O_1O_4$. O_1 и O_4 — центры окружностей S_1 и S_4, симметричных относительно прямой A_2A_3 (см. решение задачи б), черт. 141); следовательно, точки O_1

и O_4 симметричны относительно A_2A_3, и потому $O_1O_4 \perp A_2A_3$. В четырёхугольнике $A_1A_4O_1O_4$ $O_1A_4 = O_4A_1 = R$ (R — общий радиус окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4) и $O_4O_1 \| A_1A_4$. Следовательно, этот четырёхугольник является параллелограммом или равнобочной трапецией. Но равнобочной трапецией четырёхугольник $A_1A_4O_1O_4$ быть не может, так как перпендикуляр A_2A_3 к стороне O_4O_1 этого четырёхугольника в её середине не пересекает стороны A_1A_4. Следовательно, $A_1A_4O_1O_4$ есть параллелограмм и его диагонали A_1O_1 и A_4O_4 делятся в точке пересечения O пополам. Точно так же показывается, что середины отрезков A_2O_2 и A_3O_3 совпадают с серединой O отрезка A_4O_4.

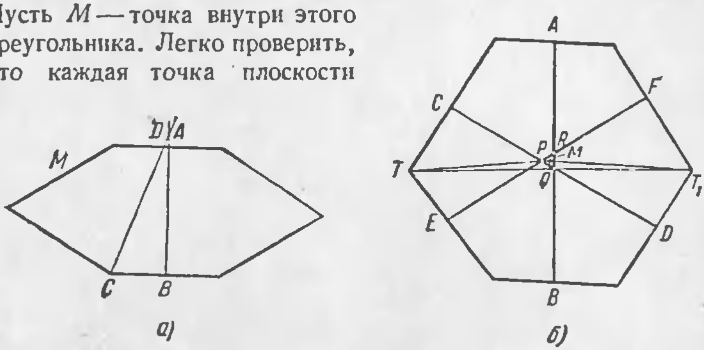
33. а) Обозначим через O' точку, симметричную центру O окружности S относительно прямой A_2A_3 (черт. 142). Тогда четырёхугольники $OO'H_4A_1$ и $OO'H_1A_4$ — параллелограммы (см. решение задачи 32 в)). Поэтому $A_1H_4 = OO' = A_4H_1$, $A_1H_4 \| OO' \| A_4H_1$ и, следовательно, четырёхугольник $A_1H_4H_1A_4$ есть параллелограмм. Отсюда следует, что отрезки A_1H_1 и A_4H_4 делятся в точке пересечения H пополам. Точно так же доказывается, что середины отрезков A_2H_2 и A_3H_3 совпадают с серединой H отрезка A_1H_1.



Черт. 142.

б) Из сравнения черт. 142 с черт. 141 видно, что, например, точка H_4 лежит на окружности S', симметричной окружности S относительно прямой A_2A_3; на этой окружности лежит также и точка H_1. Таким образом, точки A_2, A_3, H_1 и H_4 лежат на одной окружности, равной окружности S. Аналогично доказываются и остальные утверждения задачи.

34. Прежде всего ясно, что две оси симметрии AB и CD многоугольника M должны пересекаться внутри M; действительно, если бы это было не так (черт. 143, *а*), то обе оси симметрии не могли бы делить многоугольник на равные по площади части. Покажем теперь, что если многоугольник имеет третью ось симметрии EF, то она проходит через точку пересечения первых двух. Предположим, что это не так; в таком случае три оси симметрии AB, CD и EF образуют в пересечении некоторый треугольник PQR (черт. 143, *б*). Пусть M — точка внутри этого треугольника. Легко проверить, что каждая точка плоскости



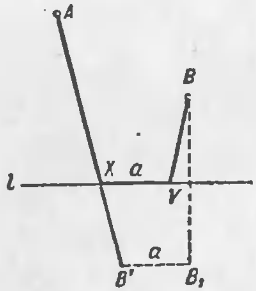
Черт. 143.

лежит с точкой M по одну сторону хотя бы от одной из трёх осей симметрии. Пусть теперь T есть та из вершин многоугольника, которая удалена от точки M на наибольшее расстояние (или одна из таких вершин, если их несколько), и точки M и T лежат по одну сторону от оси симметрии AB. Тогда, если T_1 есть вершина многоугольника, симметричная вершине T относительно AB, то $MT_1 > MT$ (так как проекция MT_1 на TT_1 больше проекции MT на TT_1, см. черт. 143, *б*). Полученное противоречие и доказывает теорему.

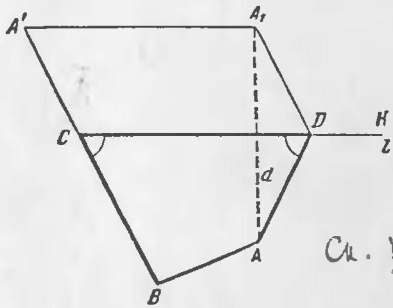
[Аналогично можно доказать, что если какая-либо ограниченная плоская фигура (может быть, не являющаяся многоугольником) имеет несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке. Для неограниченных фигур это уже неверно: так, например, полоса между двумя параллельными прямыми l_1 и l_2 имеет бесконечно много осей симметрии, перпендикулярных к l_1 и l_2 и параллельных между собой.]

Замечание. Предложение настоящей задачи с очевидностью следует также и из механических соображений: так как центр тяжести однородного тела в форме многоугольника, имеющего ось симметрии, очевидно, должен лежать на этой оси, то в случае, если многоугольник имеет несколько осей симметрии, все они должны проходить через центр тяжести.

35. Так как длина отрезка XY равна a, то надо, чтобы сумма $AX+BY$ была минимальна. Предположим, что отрезок XY найден. Скользящая симметрия с осью l и величиной параллельного переноса a переводит точку B в B', а точку Y в X (черт. 144); поэтому $BY=B'X$ и, следовательно, $AX+BY=AX+B'X$. Таким образом, требуется, чтобы длина ломаной AXB' была наименьшей. Отсюда следует, что X есть точка пересечения прямой l с отрезком AB'.



Черт. 144.



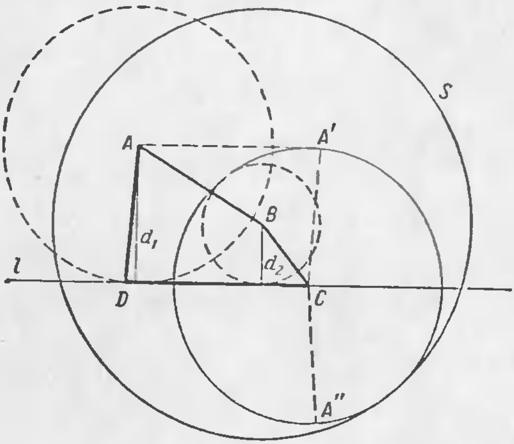
Черт. 145.

Ск. решени

36. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ построен. Пусть A' — точка, в которую переходит точка A при скользящей симметрии с осью DC и величиной параллельного переноса DC (черт. 145); тогда $\angle A'CD=\angle ADK$, где DK — продолжение стороны DC за точку D (если A_1 симметрична A относительно DC, то $\angle A'CD=\angle A_1DK=\angle ADK$). Но $\angle ADK=180°-\angle D=180°-\angle C$; следовательно, $\angle A'CD=180°-\angle C$, т. е. $A'CB$ — прямая. Кроме того, нам известны $A'B=A'C+CB=AD+CB$ и расстояние от A до CD.

Таким образом, мы приходим к следующему построению. Пусть l есть произвольная прямая, A — точка, удалённая от l на расстояние d, A' — точка, в которую переводит A скользящая симметрия с осью l и величиной параллельного переноса DC. Вершину B четырёхугольника построим, зная расстояния AB и $A'B = AD + BC$; вершина C определится как точка пересечения отрезка $A'B$ с прямой l; вершину D, лежащую на прямой l, найдём, отложив на l от C известный отрезок CD. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

б) Возьмём на плоскости отрезок AB; тогда прямую l, на которой находится сторона CD, можно построить как общую внешнюю касательную к окружностям радиусов d_1 и d_2 с цен-



Черт. 146.

трами A и B (черт. 146). Теперь остаётся только расположить на прямой l отрезок DC данной длины так, чтобы сумма длин $AD + BC$ имела данную величину (ср. с задачей 30 а)).

Предположим, что точки D и C найдены, и пусть теперь A' и A'' — точки, в которые переводят точку A соответственно параллельный перенос в направлении l на величину DC и скользящая симметрия с осью l и величиной параллельного переноса DC. Очевидно, что окружность с центром C и радиусом AD проходит через точки A' и A'' ($A'C = A''C = AD$) и касается окружности S с центром B и радиусом $BC + CA'' = BC + AD$. Но окружность S можно построить, и остаётся только найти окружность, проходящую через две известные точки A' и A'' и касающуюся S (см. задачу 49 б) из § 1 гл. I второй части). Центр этой окружности и будет вершиной C.

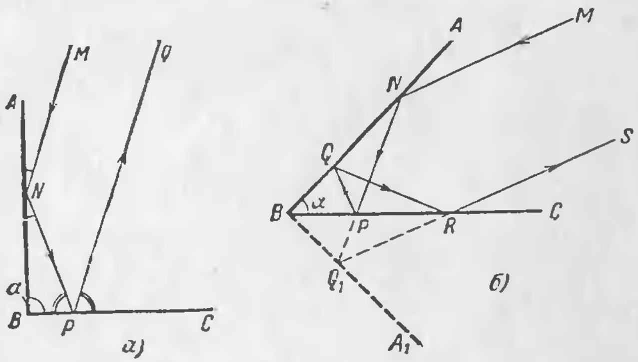
37. Первое решение. Очевидно, луч сразу отразится от стороны угла по направлению, противоположному первоначальному, лишь если он перпендикулярен к этой стороне; для любого луча это неверно. Предположим теперь, что луч MN после двукратного отражения от сторон угла ABC уходит в направлении PQ, противоположном MN (черт. 147, *а*). В этом случае имеем:

$$\angle PNB + \angle NPB = 180^\circ - \angle NBP = 180^\circ - \alpha;$$

$$\begin{aligned} 2(180^\circ - \alpha) &= 2\angle PNB + 2\angle NPB = \\ &= \angle ANM + \angle PNB + \angle NPB + \angle CPQ = \\ &= 360^\circ - (\angle MNP + \angle QPN) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ, \end{aligned}$$

и следовательно, $\alpha = 90^\circ$; обратно, если $\alpha = 90^\circ$, то $\angle MNP + \angle QPN = 180^\circ$, т. е. направление луча PQ противоположно MN.

Пусть теперь луч MN после четырёхкратного отражения от сторон угла уходит в направлении RS, противоположном

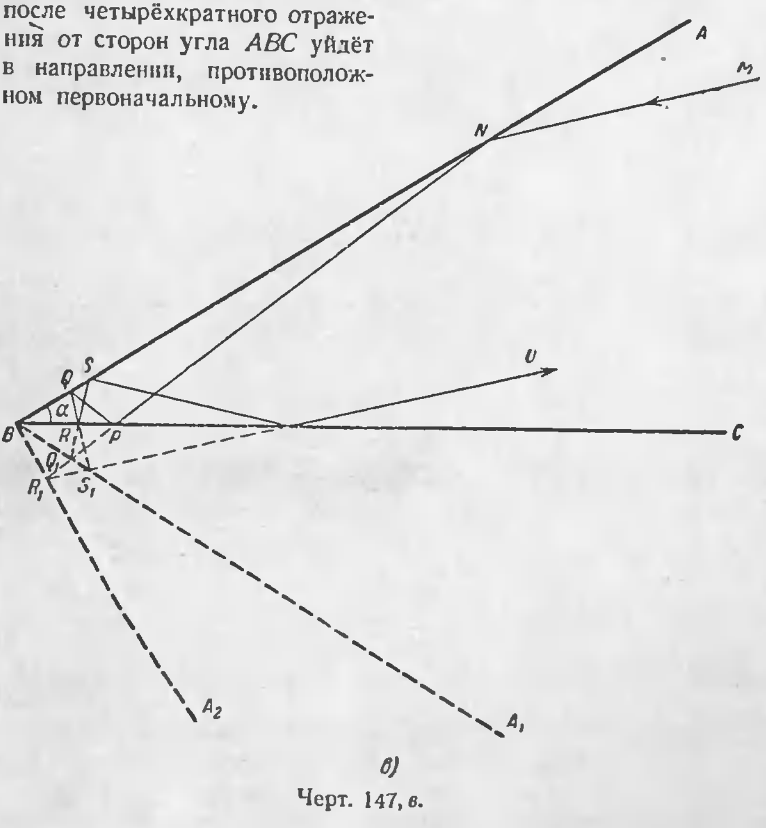


Черт. 147, *а*, *б*.

107-1

первоначальному (черт. 147, *б*; после трёхкратного отражения луч может уйти по направлению, противоположному первоначальному, лишь в том случае, когда он падает на вторую сторону угла в направлении, перпендикулярном к ней; для любого луча это неверно). Отразим прямую AB и ломаную PQR от прямой BC: прямая BA_1 симметрична BA, а точка Q_1 симметрична Q относительно BC. Тогда $\angle ABA_1 = 2\angle ABC = 2\alpha$. Далее, $\angle QPB = \angle Q_1PB = \angle NPC$; значит, NPQ_1 —

одна прямая. Точно так же доказывается, что Q_1RS — одна прямая ($\angle QRB = \angle Q_1RB = \angle SRC$). Наконец, $\angle BQ_1P = \angle A_1Q_1R$, так как эти углы равны соответственно углам BQP и AQR, равным между собой. Таким образом, мы имеем, что луч MN, отразившись в точках N и Q_1 от сторон угла $ABA_1 = 2\alpha$, уходит в направлении Q_1S, противоположном направлению первоначального падения. Но в таком случае $2\alpha = 90°$; следовательно, $\alpha = \frac{90°}{2}$. Обратно, если $\alpha = \frac{90°}{2}$, то $\angle ABA_1 = 90°$ и луч MN после четырёхкратного отражения от сторон угла ABC уйдёт в направлении, противоположном первоначальному.



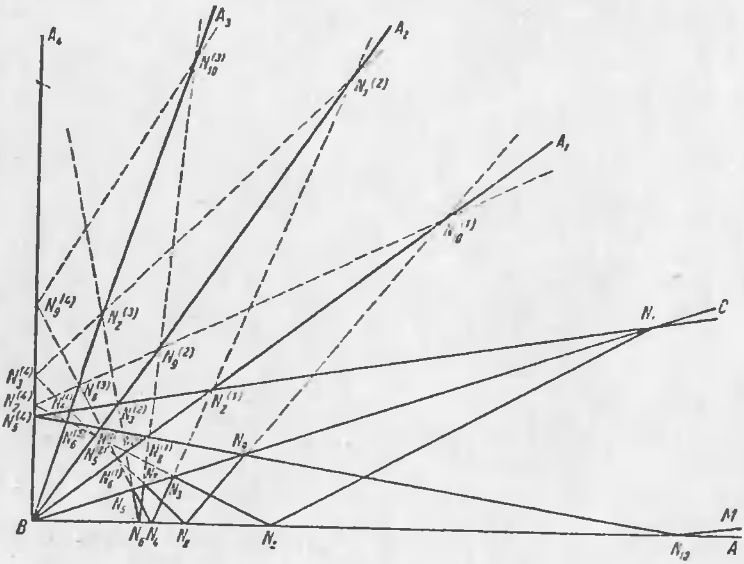
Черт. 147, *в*.

Пусть теперь луч MN после шестикратного отражения от сторон угла уходит в направлении TU, противоположном направлению первоначального падения (черт. 147, *в*; после пятикратного отражения любой луч не может уходить в направлении, противоположном первоначальному). Отразим прямую AB и ломаную $PQRST$ от прямой BC; пусть BA_1 симметрична BA, а точки Q_1 и S_1 — точкам Q и S относительно прямой BC. Аналогично предыдущему заключаем, что NPQ_1 — одна прямая ($\angle Q_1PB = \angle QPB = \angle NPC$), S_1TU — одна прямая ($\angle S_1TB = \angle STB = \angle UTC$) и $\angle Q_1RB = \angle S_1RC$; $\angle RQ_1B = \angle PQ_1A_1$, $\angle RS_1B = \angle TS_1A_1$ (так как они равны углам QRB и SRC, соответственно RQB и PQA, RSB и TSA, равным между собой). Таким образом, мы находим, что луч MN, отразившись последовательно в точках N, Q_1, R и S_1 от прямых AB, BA_1, BC и снова BA_1, уходит в направлении S_1U, противоположном первоначальному направлению MN.

Отразим теперь прямую BC и ломаную Q_1RS_1 от прямой BA_1; пусть BA_2 симметрична прямой BC и точка R_1 симметрична точке R относительно прямой BA_1. В таком случае NPQ_1R_1 — одна прямая (ибо $\angle R_1Q_1B = \angle RQ_1B = \angle PQ_1A_1$) и R_1S_1TU — одна прямая (ибо $\angle R_1S_1B = \angle RS_1B = \angle TS_1A_1$), и $\angle Q_1R_1B = \angle S_1R_1A_2$ (ибо они равны соответственно углам Q_1RB и S_1RC, равным между собой). Таким образом, мы находим что луч MN, отразившись в точках N и R_1 от сторон угла ABA_2 (величины 3α), уходит в направлении R_1U, противоположном направлению первоначального падения MN. А в таком случае должно быть $3\alpha = 90°$, т. е. $\alpha = \frac{90°}{3}$. Обратно, если $\alpha = \frac{90°}{3}$, то $\angle ABA_2 = 90°$ и луч MN после шестикратного отражения от сторон угла ABC уйдёт в направлении, противоположном первоначальному.

Пусть, наконец, луч после $2n$-кратного отражения от сторон угла величины α уходит в направлении, противоположном направлению первоначального падения (см. черт. 148, где $2n = 10$; после $(2n-1)$-кратного отражения от сторон угла любой луч не может уходить в направлении, противоположном направлению первоначального падения). Обозначим точки, в которых луч отражается от сторон угла, через $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{2n}$, как указано на чертеже. Отразим сторону BA угла от стороны BC; затем сторону BC от получившейся прямой BA_1; затем прямую BA_1 от получившейся прямой BA_2, и т. д.; всего таким образом произведём $n-1$ отражений. Точку, в которую переходит точка N_i (i — какой-то из номеров $1, 2, \ldots, 2n$) в результате j последовательных отражений (здесь число j может быть равно 1, 2, ..., $n-1$), мы обозначим через $N_i^{(j)}$; соответственно этому вместо N_i мы будем дальше иногда писать $N_i^{(0)}$.

Докажем, что точки $N_1^{(0)}, N_2^{(1)}, N_3^{(2)}, \ldots, N_n^{(n-1)}$ лежат все на одной прямой. Для этого достаточно показать, что лежат на одной прямой точки $N_1^{(0)}$, $N_2^{(1)}$ и $N_3^{(2)}$; точки $N_2^{(1)}$,



Черт. 148.

$N_3^{(2)}$ и $N_4^{(3)}$; точки $N_3^{(2)}$, $N_4^{(3)}$ и $N_5^{(4)}$; и т. д. Для того чтобы показать, что точки $N_i^{(i-1)}$, $N_{i+1}^{(i)}$ и $N_{i+2}^{(i+1)}$ (здесь i — какой-то из номеров 1, 2, ..., $n-2$) лежат на одной прямой, достаточно проверить, что

$$\angle N_i^{(i-1)} N_{i+1}^{(i)} A_i = \angle B N_{i+1}^{(i)} N_{i+2}^{(i+1)}$$

или

$$\angle N_i^{(i-1)} N_{i+1}^{(i)} A_i = \angle N_{i+2}^{(i-1)} N_{i+1}^{(i)} B$$

(ибо точки $N_{i+2}^{(i-1)}$ и $N_{i+2}^{(i+1)}$ симметричны относительно BA_i), или

$$\angle N_i^{(i-1)} N_{i+1}^{(i-2)} A_{i-2} = \angle N_{i+2}^{(i-1)} N_{i+1}^{(i-2)} B$$

(ибо точки $N_{i+1}^{(i)}$ и $N_{i+2}^{(i-2)}$ симметричны относительно BA_{i-1}), или

$$\angle N_i^{(i-3)} N_{i+1}^{(i-2)} A_{i-2} = \angle N_{i+2}^{(i-3)} N_{i+1}^{(i-2)} B$$

(ибо точки $N_i^{(i-1)}$ и $N_i^{(i-3)}$, $N_{i+2}^{(i-1)}$ и $N_{i+2}^{(i-3)}$ симметричны относительно BA_{i-2}), ... и т. д. При i чётном мы окончательно приходим к равенству

$$\angle N_i N_{i+1} C = \angle N_{i+2} N_{i+1} B,$$

а при i нечётном — к равенству

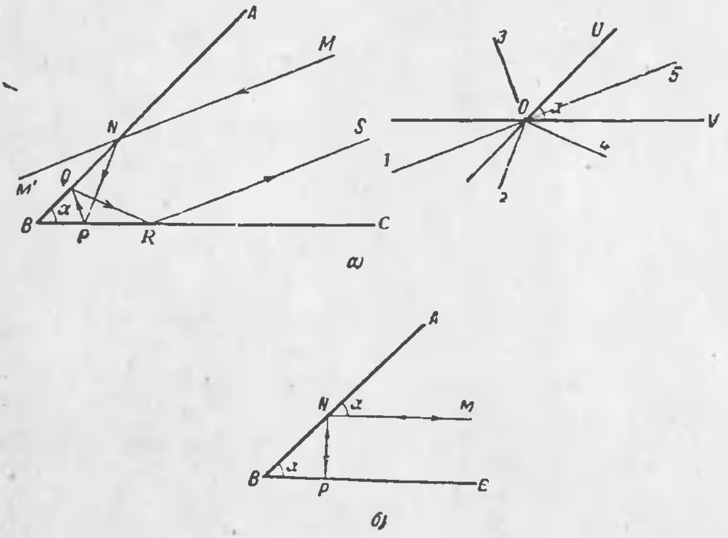
$$\angle N_i N_{i+1} A = \angle N_{i+2} N_{i+1} B;$$

оба эти равенства следуют из закона отражения лучей.

Совершенно аналогично показывается, что точки N_{2n}, $N_{2n-1}^{(0)}$, $N_{2n-2}^{(1)}$, $N_{2n-3}^{(2)}$, ..., $N_n^{(n-1)}$ тоже лежат все на одной прямой и что $\angle N_{n-1}^{(n-2)} N_n^{(n-1)} A_{n-1} = \angle N_{n+1}^{(n-2)} N_n^{(n-1)} B$, т. е. $\angle N_1 N_n^{(n-1)} A_{n-1} = \angle N_{2n} N_n^{(n-1)} B$. Таким образом, мы имеем луч $PN_n^{(n-1)} N_{2n} M$, который, отразившись в точках $N_n^{(n-1)}$ и N_{2n} от сторон угла ABA_{n-1} величины $n\alpha$, уходит в направлении, противоположном направлению первоначального падения. А отсюда следует, что $n\alpha = 90°$, т. е. $\alpha = \frac{90°}{n}$.

Второе решение. Пусть ABC—данный угол, $MNPQ$...— путь луча (см. черт. 149, *а*, на котором изображён случай $n = 2$, $\alpha = 45°$). Нас интересуют лишь направления хода луча, поэтому удобно перенести все эти направления в одну точку O (на чертеже $O1 \| MN$, $O2 \| NP$, $O3 \| PQ$, ... и т. д.). Так как $\angle MNA = \angle PNB$, то луч $O2$ получается из луча $O1$ симметрией относительно прямой $OU \| AB$ (для доказательства достаточно заметить, что на черт. 149, *а* NM' симметрично NP относительно NB). Точно так же луч $O3$ получается из луча $O2$ симметрией относительно прямой $OV \| BC$. Поэтому в силу предложения 3° на стр. 50 луч $O3$ получается из луча $O1$ поворотом на угол $2\angle UOV = 2\alpha$. Аналогично луч $O5$ получается из луча $O3$ поворотом на угол 2α в том же направлении; следовательно, луч $O5$ получается из луча $O1$ поворотом на 4α и т. д. Поэтому, если $\alpha = \frac{90°}{n}$, то луч $O(2n+1)$, указывающий направление, которое получит луч света после

n-кратного отражения от каждого из зеркал, будет образовывать с лучом $O1$ угол $n \cdot 2\alpha = 180°$, что и доказывает утверждение задачи. [Здесь мы считаем, что $0 < \angle MNA < \alpha$; если $\angle MNA > \alpha$, то луч NM пересечётся со стороной BC угла и, значит, зеркало BC задержит луч до падения на зеркало BA. Это условие гарантирует, что лучи в направлениях $O1$, $O3$, $O5$, ... и т. д. все попадут на зеркало BA, а лучи



Черт. 149.

в направлениях $O2$, $O4$, ... и т. д. — на зеркало BC. Если $\angle MNA = \alpha$, т. е. направление луча MN параллельно зеркалу BC, то уже луч $O(2n)$ будет противоположен по направлению лучу $O1$: в этом случае направление уходящего луча также будет противоположно первоначальному направлению его, но общее число отражений от зеркал будет на 1 меньше общего случая — см. черт. 149, *б*, где $\angle ABC = 45°$, $\angle MNA = 45°$.]

Эти же рассуждения показывают, что если $\alpha \neq \frac{90°}{n}$, то каждый луч не может после ряда отражений уйти в направлении, противоположном направлению первоначального падения.

38. а) Первое решение (ср. с первым решением задач 13, 19). Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — искомый n-угольник, B_1 — какая-то точка плоскости. Отразим отрезок A_1B_1 последовательно от прямых l_1, l_2, ..., l_{n-1}, l_n; при этом мы получим отрезки A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n, A_1B_{n+1}. Так как все эти отрезки равны между собой, то $A_1B_1 = A_1B_{n+1}$, т. е. точка A_1 равноудалена от B_1 и B_{n+1} и, следовательно, лежит на перпендикуляре, восставленном к отрезку B_1B_{n+1} в его середине.

Выберем теперь на плоскости ещё какую-то точку C_1, и пусть C_2, C_3, ..., C_n, C_{n+1} — точки, которые получаются из точки C_1 при последовательных отражениях от прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_n$. Очевидно, вершина A_1 n-угольника также равноудалена от точек C_1 и C_{n+1} и лежит на перпендикуляре, восставленном к отрезку C_1C_{n+1} в его середине. Поэтому вершину A_1 находим как пересечение перпендикуляров, восставленных к отрезкам B_1B_{n+1} и C_1C_{n+1} в их серединах (отрезки B_1B_{n+1} и C_1C_{n+1} мы можем построить, выбрав точки B_1 и C_1 произвольно). Отразив A_1 последовательно относительно данных n прямых, мы найдём и остальные вершины n-угольника.

Задача имеет единственное решение, если отрезки B_1B_{n+1} и C_1C_{n+1} не параллельны (в этом случае перпендикуляры p и q, восставленные к этим отрезкам в их серединах, пересекаются в одной точке); если $B_1B_{n+1} \| C_1C_{n+1}$, то задача вовсе не имеет решений, когда перпендикуляры p и q параллельны, и бесконечно много решений (задача неопределённа), когда p и q совпадают.

Полученный в решении задачи n-угольник может оказаться самопересекающимся.

Недостатком этого решения задачи является то, что в нём не находит отражения существенное различие между случаями, когда n чётно и когда оно нечётно (см. второе решение задачи).

Второе решение (ср. со вторым решением задач 13, 19). Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — искомый n-угольник (см. черт. 49, a в тексте). Отразим последовательно вершину A_1 от прямых l_1, l_2, ..., l_{n-1}, l_n; получим точки A_2, A_3, ..., A_n и, наконец, снова A_1. Таким образом, A_1 есть неподвижная точка суммы симметрий относительно прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Рассмотрим теперь отдельно два случая.

1°. n — чётное число. В этом случае сумма симметрий относительно прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, вообще говоря, будет являться вращением вокруг некоторой точки O (см. выше, стр. 55), которую мы можем найти, применяя построения, относящиеся к сложению движений. Точка O будет единственной неподвижной точкой вращения; следовательно, вершина A_1 должна совпасть с O. Найдя A_1, мы затем без труда построим и все остальные вершины n-угольника. Задача в этом случае имеет единственное решение.

В исключительном случае, когда сумма симметрий относительно $l_1, l_2, \ldots, l_n$ представляет собой параллельный перенос или тождественное преобразование (вращение на угол 0 или параллельный перенос на расстояние 0), задача вовсе не имеет решения (параллельный перенос не имеет неподвижных точек), или решение задачи будет неопределённым — за вершину A_1 искомого n-угольника можно будет принять любую точку плоскости (каждая точка является неподвижной точкой тождественного преобразования).

2°. n — нечётное число. В этом случае сумма симметрий относительно прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, вообще говоря, будет представлять собой скользящую симметрию (см. выше, стр. 55—56). Так как скользящая симметрия не имеет неподвижных точек, то при нечётном n задача не имеет решения. В исключительном случае, когда сумма симметрий относительно $l_1, l_2, \ldots, l_n$ является симметрией относительно прямой l (эту прямую можно построить), решение задачи будет неопределённо — любую точку прямой l можно будет принять за вершину A_1 n-угольника (любая точка оси симметрии является неподвижной точкой симметрии относительно прямой).

[Так, при $n = 3$ задача, вообще говоря, не будет иметь решения; исключением является лишь случай, когда прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке (см. задачу 25 в)) или параллельны; в этих случаях задача будет неопределённой (см. предложение 4° на стр. 53).]

б) Эта задача близка к задаче а). Если $A_1A_2 \ldots A_n$ — искомый n-угольник (см. черт. 49, *б* в тексте), то прямая A_nA_1 в результате n последовательных симметрий относительно прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_n$ переходит в прямые $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ и, наконец, снова в A_nA_1. Таким образом, прямая A_nA_1 искомого n-угольника есть неподвижная прямая суммы симметрий относительно прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Далее рассмотрим два случая.

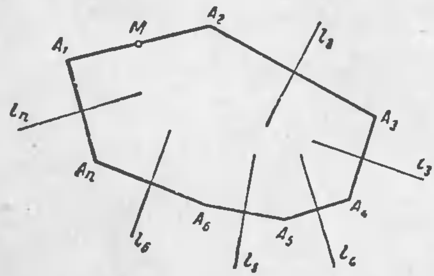
1°. n — чётное число. В этом случае сумма симметрий относительно прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, вообще говоря, представляет собой вращение вокруг некоторой точки O и, следовательно, не имеет неподвижных прямых. Таким образом, при чётном n наша задача не имеет решения. В исключительном случае, когда сумма симметрий относительно этих прямых представляет собой симметрию относительно точки O (вращение на угол 180°), или параллельный перенос, или тождественное преобразование, решение задачи будет неопределённо: в первом случае за сторону A_nA_1 n-угольника можно будет принять любую прямую, проходящую через центр симметрии; во втором случае — любую прямую, параллельную направлению параллельного переноса NN'; в третьем случае — вообще любую прямую плоскости.

2°. n — нечётное число. В этом случае сумма симметрий относительно прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, вообще говоря, представляет собой скользящую симметрию с осью l (которую можно построить). Так как l есть единственная неподвижная прямая скользящей симметрии, то сторона A_nA_1 искомого n-угольника должна совпасть с l; отразив эту прямую последовательно относительно прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$, мы найдём и все остальные стороны искомого n-угольника. Таким образом, при n нечётном задача имеет, вообще говоря, единственное решение. Исключением является случай, когда сумма симметрий относительно этих прямых является симметрией относительно некоторой прямой l; в этом случае решение задачи будет неопределённо: за сторону A_nA_1 n-угольника можно принять как прямую l, так и любую прямую, перпендикулярную к l.

[Так, при $n = 3$ задача имеет, вообще говоря, единственное решение; при этом прямые l_1, l_2, l_3 будут все три являться биссектрисами внешних углов построенного треугольника или две из них будут биссектрисами внутренних углов, а одна — биссектрисой внешнего угла. Исключением является случай, когда прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке; в этом случае решение задачи будет неопределённым (см. задачу 25 а)); прямые l_1, l_2, l_3 будут все являться биссектрисами внутренних углов построенного треугольника или две из них будут биссектрисами внешних углов, а одна — биссектрисой внутреннего угла.]

Предоставляем читателю самому найти решение задачи б), аналогичное первому решению задачи а).

39. а) Предположим, что задача решена (черт. 150). Симметрия относительно точки M переводит вершину A_1 в вершину A_2, симметрия относительно прямой l_2 — вершину A_2



Черт. 150.

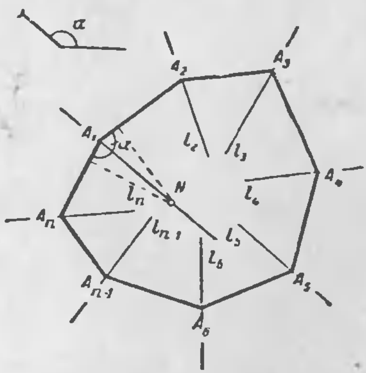
в вершину A_3, симметрия относительно l_3 — A_3 в A_4 и т. д., наконец, симметрия относительно l_n переводит A_n в A_1. Таким образом, A_1 есть неподвижная точка суммы симметрии относительно точки M и $n-1$ симметрий относительно прямых l_2, l_3, ..., l_n. Симметрия относительно точки M равносильна паре симметрий относительно прямых. Далее рассмотрим отдельно два случая.

1°. n — нечётное число. В этом случае задача сводится к нахождению неподвижной точки суммы чётного числа симметрий относительно прямой. Эта сумма симметрий представляет собой, вообще говоря, вращение вокруг некоторой точки O (которую можно построить, зная точку M и прямые l_2, l_3, ..., l_n). Поэтому при нечётном n задача имеет единственное решение (сравните со случаем 1° в решении задачи 38 а)). Исключением является случай, когда сумма чётного числа симметрий относительно прямой явится параллельным переносом — задача не имеет решения, или тождественным преобразованием — решение задачи неопределённо.

2°. n — чётное число. В этом случае задача сводится к определению неподвижной точки суммы нечётного числа симметрий относительно прямой. В общем случае эта сумма представляет собой скользящую симметрию и задача вовсе не имеет решения (скользящая симметрия не имеет неподвижных точек). В частном случае сумма нечётного числа симметрий может оказаться симметрией относительно прямой l; тогда задача является неопределённой (симметрия относительно прямой имеет бесконечно много неподвижных точек, а именно все точки оси l).

Построение можно также произвести аналогично первому решению задачи 38 а). Полученный в качестве решения многоугольник может оказаться и самопересекающимся.

б) Предположим, что задача решена (черт. 151). Поворот на угол $180° - \alpha$ вокруг точки N переводит прямую A_nA_1 в A_1A_2, симметрия относительно l_2 переводит A_1A_2 в A_2A_3, симметрия относительно l_3 — A_2A_3 в A_3A_4 и т. д., наконец, симметрия относительно l_n переводит $A_{n-1}A_n$ в A_nA_1. Таким образом, A_nA_1 есть неподвижная прямая суммы вращения вокруг N на угол $180° - \alpha$ (которое можно заменить суммой двух симметрий относительно прямой) и $n-1$ симметрий относительно прямых $l_2, l_3, \ldots, l_n$.



Черт. 151.

Рассмотрим теперь отдельно два случая.

1°. n — чётное число. Сумма нечётного числа симметрий относительно прямой в общем случае представляет собой скользящую симметрию, которая имеет единственную неподвижную прямую — ось скользящей симметрии l (которую можно построить), и следовательно, задача имеет единственное решение. В частном случае мы можем прийти к симметрии относительно прямой, и тогда решение задачи будет неопределённым (ибо симметрия относительно прямой имеет бесконечно много неподвижных прямых).

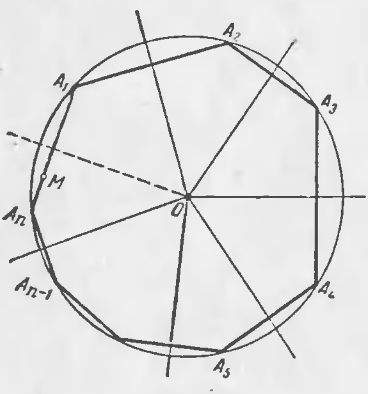
2°. n — нечётное число. В таком случае рассматриваемое движение будет представлять собой сумму чётного числа симметрий относительно прямой, которая, вообще говоря, является вращением. Задача в этом случае решения не имеет.

В частных случаях мы можем прийти к симметрии относительно точки, параллельному переносу или тождественному преобразованию; в этих случаях решение задачи будет неопределённо.

Построенный многоугольник может оказаться самопересекающимся; прямые l_2, l_3, ..., l_n будут являться биссектрисами его внутренних или внешних углов.

Построение можно также произвести аналогично первому решению задачи 38 а).

40. а) Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_n$ — искомый n-угольник (черт. 152). Отразим вершину A_1 n-угольника последовательно от прямых, проходящих через центр O окружности и перпендикулярных к сторонам A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 n-угольника (эти прямые нам известны, так как нам заданы направления всех сторон n-угольника); при этом точка A_1 перейдёт в A_2, затем A_2 в A_3, ..., затем A_{n-1} в A_n и, наконец, A_n снова в A_1. Таким образом, A_1 есть *неподвижная точка* суммы n симметрий относительно известных прямых. Рассмотрим теперь отдельно два случая.



Черт. 152.

1°. n — *нечётное число*. Из того, что сумма симметрий относительно трёх прямых, пересекающихся в одной точке, представляет собой симметрию относительно некоторой новой прямой, проходящей через ту же точку (см. предложение 4° на стр. 53), нетрудно вывести, что и сумма произвольного нечётного числа симметрий относительно прямых, *проходящих через одну точку*, является симметрией относительно прямой, проходящей через ту же точку. [Сначала заменяем первые три симметрии одной симметрией; затем рассматриваем сумму этой одной симметрии и следующих двух и т. д.] Поэтому сумма наших n симметрий есть симметрия относительно какой-то прямой l, проходящей через центр O окружности. На окружности имеются две неподвижные точки этой симметрии — точки пересечения окружности с прямой l. Приняв одну из этих точек за вершину A_1 искомого многоугольника, мы найдём затем остальные точки, отразив последовательно эту точку относительно n прямых. Задача имеет два решения.

2°. n — чётное число. Сумма каждых двух симметрий относительно прямых, пересекающихся в O, есть вращение вокруг O на некоторый угол. Отсюда следует, что сумму чётного числа n симметрий относительно прямых, пересекающихся в O, можно заменить суммой $\frac{n}{2}$ вращений вокруг O; отсюда видно, что эта сумма представляет собой вращение вокруг O. Так как вращение вокруг O не имеет неподвижных точек на окружности с центром O, то наша задача, вообще говоря, не имеет решений. Исключением является тот случай, когда сумма n симметрий представляет собой тождественное преобразование (вращение на угол 0°); в этом случае задача является неопределённой — любую точку окружности можно принять за вершину A_1 искомого n-угольника.

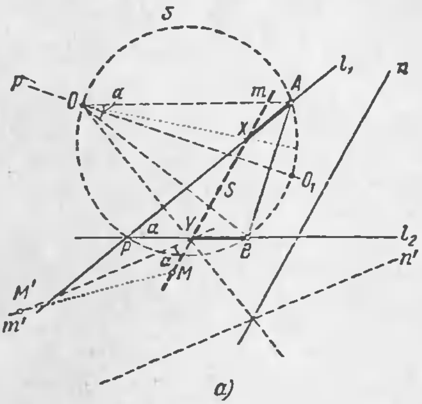
б) Предположим, что n-угольник построен (см. черт. 152). Отразим вершину A_1 последовательно от $n-1$ прямых, перпендикулярных к сторонам A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ и проходящих через центр O окружности (эти прямые нам известны, так как известны направления сторон); при этом A_1 перейдёт в A_n. Рассмотрим отдельно два случая.

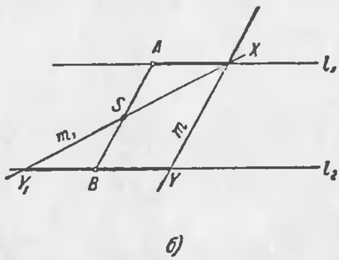
1°. n — нечётное число. В таком случае сумма $n-1$ симметрий относительно прямых, пересекающихся в одной точке, представляет собой вращение вокруг O на угол α, который можно найти. Таким образом, угол $A_1OA_n = \alpha$ нам известен, а следовательно, известна и длина хорды A_1A_n и расстояние её от центра. Так как A_1A_n должна проходить через известную точку M, то остаётся провести из точки M касательную к окружности, концентрической данной окружности S радиуса, равного расстоянию хорды A_1A_n от центра S. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

2°. n — чётное число. В этом случае сумма $n-1$ симметрий относительно пересекающихся в одной точке прямых представляет собой симметрию относительно некоторой прямой l. Поэтому A_1 симметрична A_n относительно l. А так как сторона A_1A_n должна проходить через известную точку M, то, чтобы найти её, достаточно опустить из M перпендикуляр на l. Задача всегда имеет одно решение.

§ 2

41. Первое решение (опирающееся на теорему 1, стр. 60). Пусть сначала прямые l_1 и l_2 не параллельны (черт. 153, *а*). Предположим, что задача решена. В силу теоремы 1 отрезок AX можно вращением перевести в равный ему отрезок BY так, что A перейдёт в B, а X — в Y (так как l_1 не параллельна l_2, то AX не переводится в BY параллельным переносом). Угол поворота α равен углу между l_1 и





Черт. 153.

l_2; поэтому центр вращения O можно найти как точку пересечения дуги, построенной на отрезке AB и вмещающей угол α (т. е. окружности s, описанной вокруг ABP, где P — точка пересечения l_1 и l_2), и перпендикуляра p, восставленного к AB в его середине[1]). Пусть это вращение переводит искомую прямую m в прямую m', тоже проходящую через Y. Далее рассмотрим отдельно задачи а) — г).

а) Повернём прямую n вокруг найденного центра O на угол α в положение n'. Прямая OY является биссектрисой угла между m и m' и между n и n'; поэтому Y можно найти как точку пересечения прямой, соединяющей O с точкой пересечения n и n', и прямой l_2. Задача может иметь два решения (см. сноску[1])).

---

[1]) Окружность s и перпендикуляр p пересекаются в двух точках O и O_1; они отвечают случаям, когда AX и BY расположены по одну и по разные стороны от AB.

б) m' проходит через точку M', получающуюся из M вращением с центром O и углом поворота α; угол между m и m' равен α. Поэтому Y можно найти как точку пересечения дуги, построенной на отрезке MM' и вмещающей угол α, с прямой l_2. Задача может иметь два решения.

в) В равнобедренном треугольнике OXY нам известен угол при вершине α и основание $XY=a$; построив в стороне треугольник, равный $\triangle OXY$, мы определим расстояние OX от O до искомой точки X. Задача может иметь до четырёх решений.

г) Пусть S — середина XY. Так как углы равнобедренного треугольника OXY нам известны, то мы знаем также отношение $\frac{OS}{OX}=k$ и угол $XOS=\frac{\alpha}{2}$. Поэтому точка S получается из точки X известным центрально-подобным вращением (см. ниже, § 2 гл. I второй части книги [1])). Точка S находится как пересечение прямой l'_1, получающейся из l_1 этим центрально-подобным вращением, и прямой r; искомая прямая m перпендикулярна к OS. Задача, вообще говоря, имеет два решения; если l'_1 совпадает с r, то решение задачи неопределённо.

Если $l_1 \| l_2$, то искомая прямая m проходит через середину S отрезка AB или параллельна AB (черт. 153, *б*); при этом решение задач значительно упрощается. Укажем лишь число решений:

а) одно решение, если n не параллельна ни l_1, ни AB; ни одного решения, если $n \| l_1 \| l_2$; бесконечно много решений, если $n \| AB$;

б) два решения, если M не лежит ни на прямой AB, ни на средней линии l_0 полосы, образованной l_1 и l_2; одно решение, если M лежит на прямой AB или на прямой l_0, но не совпадает с S; бесконечно много решений, если M совпадает с S;

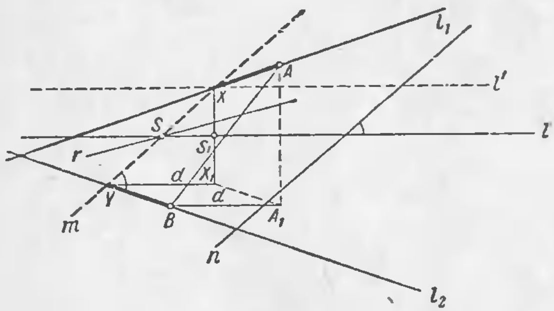
в) два решения, если $a \neq AB$, $a > d$ (d — расстояние между l_1 и l_2); одно решение, если $a=d$, но $AB \neq d$; ни одного решения, если $a < d$; бесконечно много решений, если $a=AB (\geqslant d)$;

г) одно решение, если r не параллельна $l_1 \| l_2$ и не проходит через S; ни одного решения, если $r \| l_1$ и r не проходит через S; бесконечно много решений, если r проходит через S.

---

[1]) Здесь следует предпочесть второе решение задачи, не опирающееся на материал второй части.

Второе решение задач а), в), г) (опирающееся на теорему 2, стр. 62). В силу теоремы 2 отрезок AX можно скользящей симметрией (или просто симметрией относительно прямой, которую можно рассматривать как частный случай скользящей симметрии) перевести в равный ему отрезок BY так, что A перейдёт в B, а X — в Y. При этом ось l скользящей симметрии параллельна биссектрисе угла между l_1 и l_2 и проходит через середину отрезка AB[1]); величина d параллельного переноса равна A_1B, где A_1 — точка, симметричная A относительно l (черт. 154). Пусть ещё X_1 —



Черт. 154.

точка, симметричная X относительно l; в таком случае $X_1Y \| l$ и $X_1Y = d$. Далее рассмотрим отдельно задачи а), в), г).

а) В треугольнике XX_1Y известен катет $X_1Y = d$ и острый угол XYX_1, равный углу между прямыми m и l; следовательно, можно найти катет XX_1. Точка X найдётся как пересечение прямой l_1 и прямой l', отстоящей от l на расстояние $\frac{1}{2} XX_1$. В общем случае, когда l_1 не параллельна l_2, задача имеет два решения.

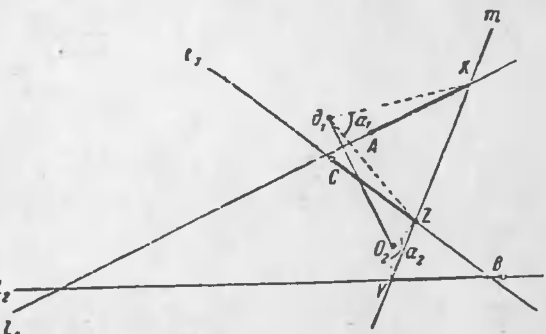
---

[1]) Так как существуют две биссектрисы углов, образованных l_1 и l_2, то скользящая симметрия, переводящая AX в BY, может быть выбрана двумя разными способами (отвечающими случаям, когда AX и BY располагаются по одну и по разные стороны от AB). Если $l_1 \| l_2$, то ось одной из этих двух скользящих симметрий параллельна l_1 и l_2, а ось другой симметрии — к ним перпендикулярна; это определяет особое место, которое занимает случай параллельности l_1 и l_2 в решениях задач а), в), г).

в) В треугольнике XX_1Y известна гипотенуза $XY = a$ и катет $X_1Y = d$; следовательно, можно найти второй катет XX_1. Далее построение не отличается от фигурирующего в решении задачи а); в общем случае задача имеет два решения.

г) Середина S отрезка XY должна лежать на прямой l — средней линии треугольника XX_1Y; поэтому она совпадёт с точкой пересечения l и r. Точка X найдётся как пересечение l_1 с перпендикуляром p, восставленным к l в такой точке S_1, что $SS_1 = \frac{d}{2}$. В общем случае задача имеет два решения.

42. Пусть прямые l_1, l_2 и l_3 не все параллельны между собой, например l_3 не параллельна ни l_1, ни l_2. Предположим, что задача решена (черт. 155). В силу теоремы 1 существует



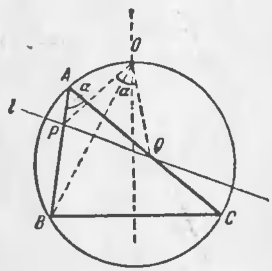
Черт. 155.

вращение, переводящее AX в CZ, и вращение, переводящее BY в CZ; углы поворота α_1 и α_2 равны соответственно углам между l_1 и l_3, l_2 и l_3, а центры вращения O_1 и O_2 находятся так же, как в первом решении задач 41 а) — г). Из равнобедренных треугольников O_1XZ и O_2YZ с углами при вершинах O_1 и O_2, соответственно равными α_1 и α_2, находим $\angle O_1ZX = 90° - \frac{\alpha_1}{2}$, $\angle O_2ZY = 90° - \frac{\alpha_2}{2}$. Отсюда следует, что $\angle O_1ZO_2 = \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{2}$, и значит, точка Z может быть найдена как точка пересечения прямой l_3 с дугой окружности, стягиваемой отрезком O_1O_2 и вмещающей известный угол $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ или $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$.

Каждый из углов поворота α_1 и α_2 и соответственно этому центры вращения O_1 и O_2 можно определить двумя различными способами (ср. с решением предыдущих задач). Поэтому наибольшее возможное число решений задачи равно 16.

Если $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, то задача имеет три решения в том случае, когда точки A, B и C не лежат на одной прямой (решения даются средними линиями треугольника ABC), и бесконечно много решений, когда ABC — прямая линия.

43. Предположим, что задача решена (черт. 156). В силу теоремы 1 существует вращение, переводящее BP в CQ; угол



Черт. 156.

поворота α равен углу между AB и AC, а центр вращения O находится как в первом решении задач 41 а) — г). Так как в равнобедренном треугольнике OPQ нам известен угол α при вершине O, то мы можем считать известным отношение $\frac{OP}{PQ} = k$. Но согласно условию задачи $PQ = BP$; поэтому можно считать известным отношение $\frac{OP}{BP} = k$, что позволяет определить P как точку пересечения стороны AB с окружностью — геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до O и до B равно k (см. сноску на стр. 102).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

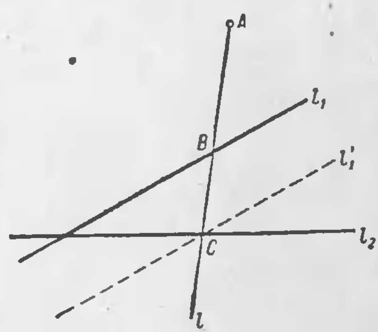
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

ГЛАВА I

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ

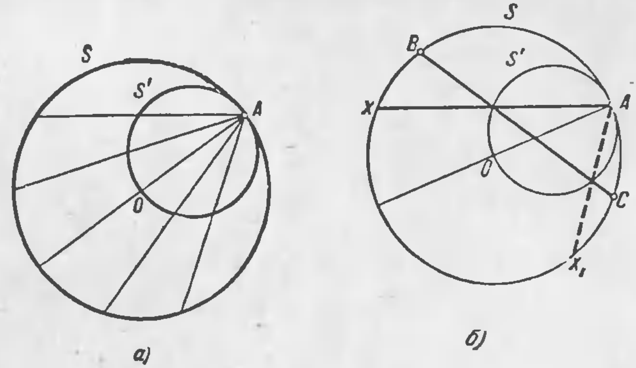
§ 1

44. Пусть прямая l проведена (черт. 157). По условию, точка C центрально-подобна точке B с центром подобия A и коэффициентом подобия $\frac{n}{m}$, поэтому она лежит на прямой l_1', центрально-подобной l_1, с центром A и коэффициентом $\frac{n}{m}$, и её можно найти как точку пересечения прямых l_2 и l_1'. Если l_1 не параллельна l_2, то задача имеет единственное решение; если $l_1 \parallel l_2$, то l_1' либо параллельна l_2, либо совпадает с l_2 — соответственно этому задача либо не имеет решения, либо неопределённа.



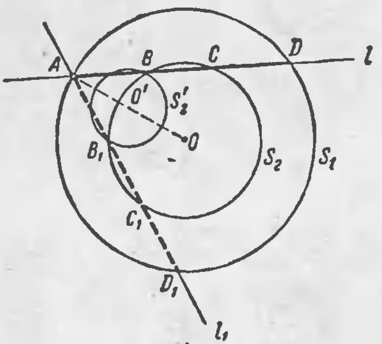
Черт. 157.

45. а) Искомое геометрическое место получается из окружности S при помощи центрально-подобного преобразования с центром A и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$; следовательно, это — окружность с диаметром AO, где O — центр S (черт. 158, *а*).



Черт. 158.

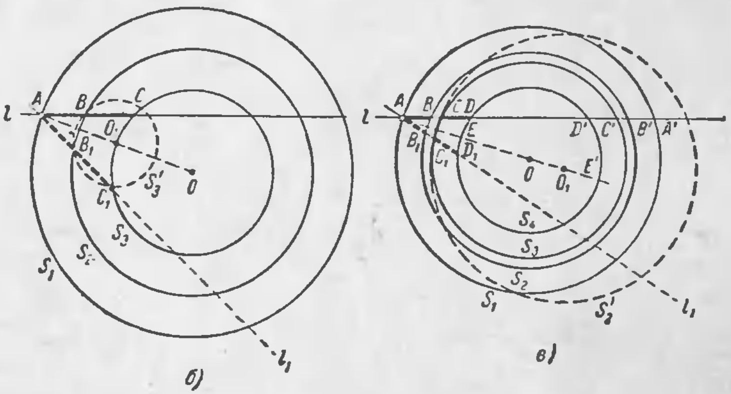
б) Построим на AO как на диаметре окружность S' (O — центр S). Точки пересечения S' с хордой BC определят искомые хорды окружности S (черт. 158, *б*), так как S' — геометрическое место середин хорд S, проходящих через A (см. задачу а)). Задача может иметь два, одно или ни одного решения.



Черт. 159, *а*.

46. а) Если прямая l проведена, то $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ (черт. 159, *а*). Отсюда вытекает следующее построение. Построим окружность S_2', центрально-подобную S_2 с центром подобия в произвольной точке A окружности S_1 и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Точки пересечения окружностей S_2 и S_2' определят искомые прямые (которых при выбранной точке A может быть две, одна или ни одной).

б) Если l проведена, то $\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$ (черт. 159, *б*). Отсюда вытекает такое построение. Построим окружность S_3', центрально-подобную окружности S_2 с центром подобия в произвольной точке A окружности S_1 и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Точки пересечения окружностей S_2 и S_3' определят искомые прямые (которых при выбранной точке A может быть две, одна или ни одной).



Черт. 159, *б*, *в*.

в) Пусть прямая l проведена и A', B', C' и D' — четыре другие точки пересечения её с окружностями S_1, S_2, S_3 и S_4 (черт. 159, *в*). Очевидно, что $AB=D'C'$. Отсюда $AD'=AB+BC'-D'C'=BC'$ и, следовательно,

$$AD:BC=(AD\cdot AD'):(BC\cdot BC').$$

Выражение $AD\cdot AD'$ не зависит от положения точек D и D'; оно равно $AE\cdot AE'$, где E и E' — точки пересечения прямой AO (O — общий центр всех четырёх окружностей) с окружностью S_4, т. е. равно $(r_1-r_4)\cdot(r_1+r_4)$, где r_1 и r_4 — радиусы S_1 и S_4. Аналогично $BC\cdot BC'=(r_2-r_3)\cdot(r_2+r_3)$, где r_2 и r_3 — радиусы S_2 и S_3. Таким образом,

$$\frac{AD}{BC}=\frac{r_1^2-r_4^2}{r_2^2-r_3^2}.$$

Далее,

$$AD = AB + BC + CD = 2AB + BC;$$

следовательно,

$$\frac{AD}{BC} = 2\frac{AB}{BC} + 1.$$

Отсюда

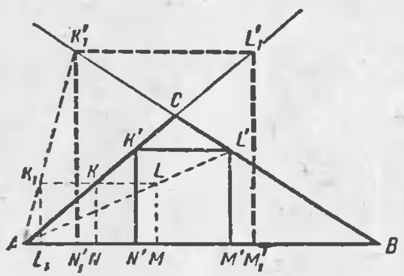
$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2 - r_4^2}{r_2^2 - r_3^2} - 1\right) = \frac{r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}{2\left(r_2^2 - r_3^2\right)},$$

и так как

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB + BC}{AB} = 1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{BC}} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2}{r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2},$$

то величину отношения $\frac{AC}{AB}$ можно считать известной.

Отсюда вытекает следующее построение. Произведём центрально-подобное преобразование с центром в произвольной точке A окружности S_1 и коэффициентом $k = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2}{r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}$; пусть окружность S_2 переходит при этом в S_2'. Точки пересечения окружностей S_2' и S_3 определяют искомые прямые (которых при выбранной точке A может быть две, одна или ни одной).

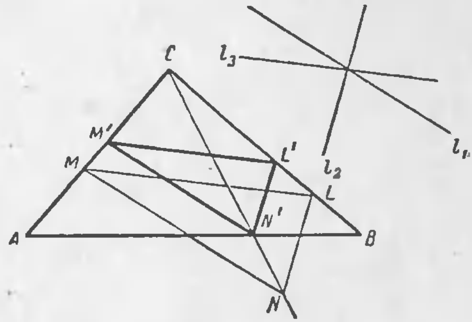


Черт. 160.

47. а) Построим квадрат $KLMN$ такой, что K лежит на стороне AC, а MN — на основании AB (черт. 160); если L' — точка пересечения прямой AL со стороной BC треугольника, то центрально-подобное преобразование с центром A и коэффициентом $k = \frac{AL'}{AL}$ переводит $KLMN$ в искомый квадрат $K'L'M'N'$.

[Если считать, что искомый квадрат может иметь вершины на сторонах треугольника ABC или на их продолжениях (см. сноску на стр. 82), то задача, вообще говоря, будет иметь два решения (квадраты $K'L'M'N'$ и $K_1'L_1'M_1'N_1'$ на черт. 160).]

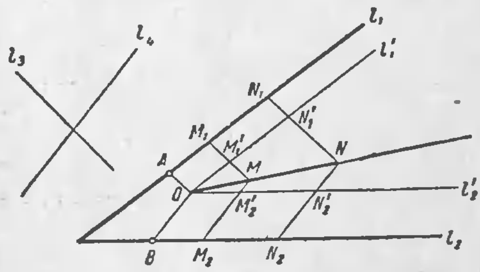
б) Построим треугольник LMN, стороны которого параллельны l_1, l_2 и l_3, и такой, что L лежит на BC, а M — на CA. Если N' — точка пересечения прямых CN и AB, то центрально-подобное преобразование с центром C и коэффициентом



Черт. 161.

$k=\frac{CN'}{CN}$ переводит треугольник LMN в искомый треугольник $L'M'N'$ (черт. 161).

48. а) Проведём через A и B прямые, параллельные l_3, соответственно l_4, и через точку O пересечения этих прямых — прямые l_1' и l_2', параллельные l_1 и l_2 (черт. 162). Возьмём



Черт. 162.

две пары точек M_1, M_2 и N_1, N_2, удовлетворяющих условию задачи: M_1 и N_1 на l_1, M_2 и N_2 на l_2 и $\frac{AM_1}{BM_2}=\frac{AN_1}{BN_2}=m$.

Пусть M_1', N_1' — точки пересечения прямых, проходящих через точки M_1, N_1 и параллельных l_3, с прямой l_1', M_2', N_2' —

точки пересечения прямых, проходящих через M_2, N_2 и параллельных l_4, с прямой l'_2. Тогда

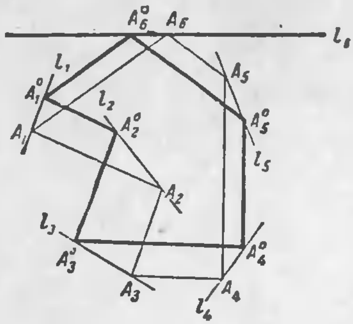
$$\frac{OM'_1}{OM'_2} = \frac{ON'_1}{ON'_2} \ (= m)$$

или

$$\frac{OM'_1}{ON'_1} = \frac{OM'_2}{ON'_2}.$$

Отсюда видно, что пара прямых $M_1M'_1$ и $M_2M'_2$ центрально-подобна (с центром подобия O) паре прямых $N_1N'_1$ и $N_2N'_2$. Следовательно, точка M пересечения прямых $M_1M'_1$ и $M_2M'_2$ центрально-подобна с центром подобия O точке N пересечения прямых $N_1N'_1$ и $N_2N'_2$; другими словами, любые две точки M и N искомого геометрического места лежат на одной прямой с точкой O. Поэтому рассматриваемое геометрическое место представляет собой прямую (для построения которой достаточно заметить, что она проходит через O и произвольно выбранную точку M, удовлетворяющую условию задачи).

б) Пусть $A_1^0A_2^0 \ldots A_n^0$ — какое-то фиксированное положение нашего многоугольника (см. черт. 163, где $n = 6$). Так как стороны многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ всё время остаются параллельными соответствующим сторонам многоугольника $A_1^0A_2^0 \ldots A_n^0$, а вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ скользят по прямым $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$, то отношения



Черт. 163.

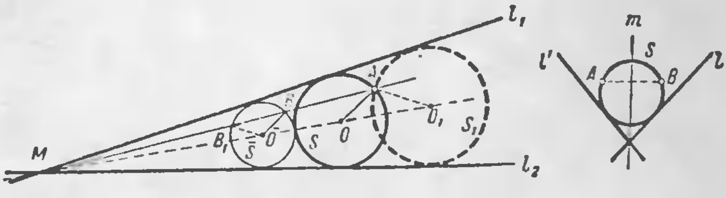
$$\frac{A_1^0A_1}{A_2^0A_2}, \ \frac{A_2^0A_2}{A_3^0A_3}, \ \ldots, \ \frac{A_{n-2}^0A_{n-2}}{A_{n-1}^0A_{n-1}}$$

не меняются. Отсюда вытекает, что и отношение $\dfrac{A_1^0A_1}{A_{n-1}^0A_{n-1}}$ $\left(= \dfrac{A_1^0A_1}{A_2^0A_2} \cdot \dfrac{A_2^0A_2}{A_3^0A_3} \ldots \dfrac{A_{n-2}^0A_{n-2}}{A_{n-1}^0A_{n-1}}\right)$ тоже не меняется. В силу задачи а) это означает, что вершина A_n также скользит по прямой линии l_n (положение которой определяется двумя произвольными положениями этой вершины).

в) Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — прямые, на которых расположены стороны заданного многоугольника. Выберем точку A_1 произвольно на прямой l_1 и построим многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$, стороны которого параллельны данным прямым, а вершины $A_2, \ldots, A_{n-1}$ лежат на прямых $l_2, \ldots, l_{n-1}$. Если вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ построенного многоугольника скользят по прямым $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ так, что его стороны остаются параллельными заданным прямым, то в силу результата задачи б) вершина A_n также скользит по некоторой прямой m; эту прямую мы можем определить, построив два каких-либо положения вершины A_n. Точка пересечения прямой m с прямой l_n определит положение вершины $\overline{A}_n$ искомого многоугольника $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\ldots\overline{A}_n$.

Если l_n не параллельна m, задача имеет единственное решение; если $l_n \parallel m$, задача не имеет решения; если l_n совпадает с m, задача неопределённа.

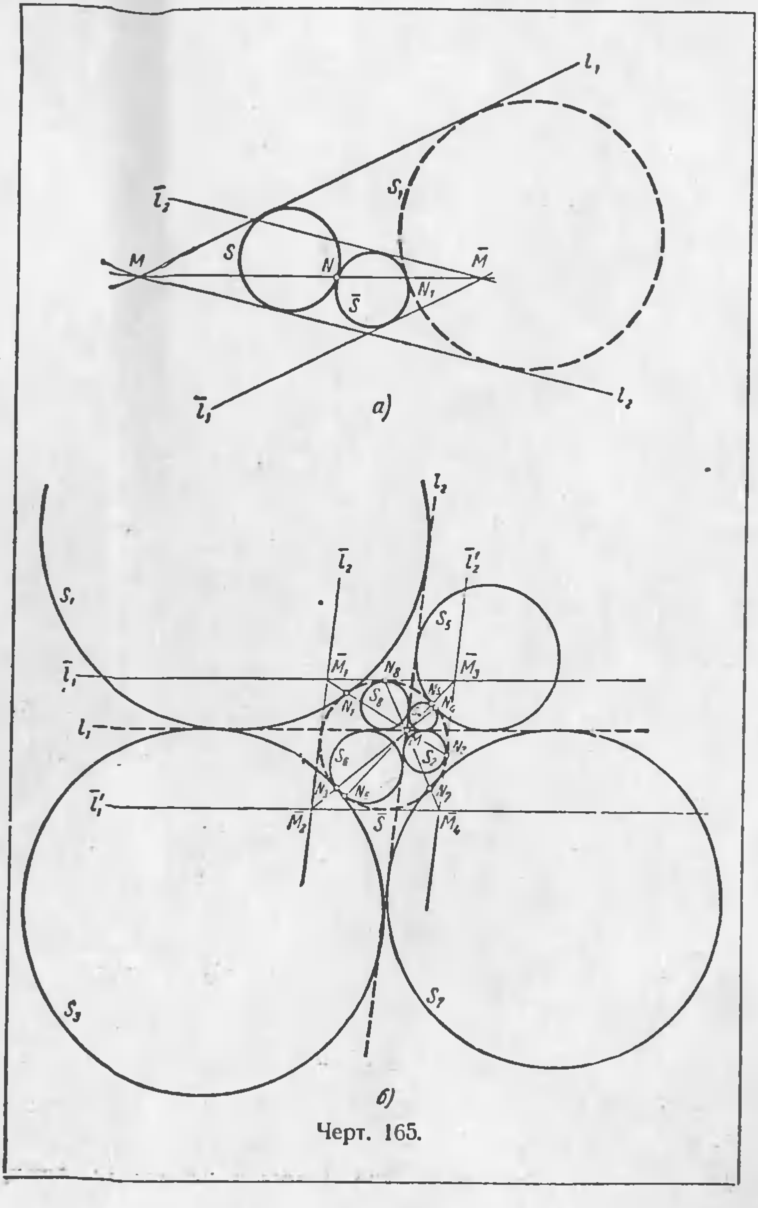
49. а) Если l_1 и l_2 параллельны, задача решается просто. Пусть l_1 и l_2 пересекаются в точке M и пусть $\overline{S}$ — произвольная окружность, вписанная в угол l_1Ml_2, внутри которого лежит точка A (черт. 164, *а*). Обозначим через B точку пересечения прямой MA с окружностью $\overline{S}$; искомая окружность S будет центрально-подобна $\overline{S}$ с центром подобия M и коэффициентом подобия $\frac{MA}{MB}$; зная центр подобия и коэффициент подобия, её легко построить. Если A не лежит ни на l_1, ни на l_2, то задача имеет два решения.



а) б)

Черт. 164.

б) Пусть m — перпендикуляр к отрезку AB в его середине; l' — прямая, симметричная l относительно m (черт. 164, *б*). Искомая окружность S должна касаться прямой l'. Таким

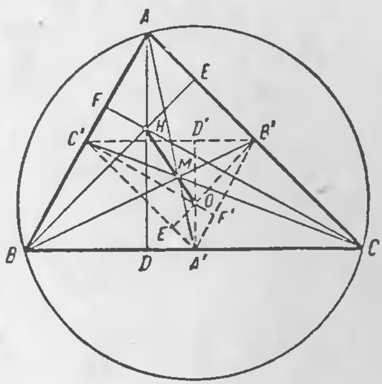


Черт. 165.

образом, мы приходим к задаче а): построить окружность, касающуюся двух известных прямых l и l' и проходящую через известную точку A.

в) Обозначим через M точку пересечения прямых l_1 и l_2, и пусть S — искомая окружность (черт. 165, *а*)[1]). Точка N касания окружностей $\overline{S}$ и S есть их центр подобия. Центрально-подобное преобразование с центром N, переводящее S в $\overline{S}$, переводит прямые l_1 и l_2 в прямые $\overline{l}_1 \parallel l_1$ и $\overline{l}_2 \parallel l_2$, касающиеся $\overline{S}$; точка M переходит в точку $\overline{M}$ пересечения $\overline{l}_1$ и $\overline{l}_2$. Поэтому N можно найти как точку пересечения прямой $M\overline{M}$ с окружностью $\overline{S}$; после этого S легко построить (центрально-подобное преобразование с центром N, переводящее $\overline{l}_1$ в l_1, переводит $\overline{S}$ в S).

Каждую из прямых $\overline{l}_1$ и $\overline{l}_2$ можно выбрать двумя способами; прямая, соединяющая точку M с точкой их пересечения, может пересечь окружность $\overline{S}$ в двух точках. Таким образом, задача может иметь до восьми решений (см., например, черт. 165, *б*).



а)
Черт. 166, *а*.

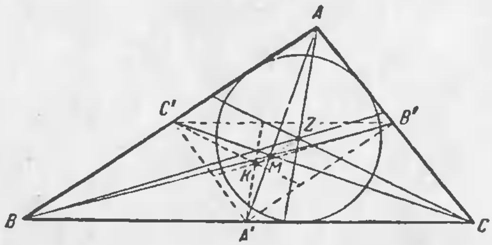
50. а) В силу известного свойства медиан треугольник $A'B'C'$, образованный средними линиями треугольника ABC, центрально-подобен ABC с центром подобия M и коэффициентом подобия $-\frac{1}{2}$ (черт. 166, *а*). При этом высотам AD, BE и CF треугольника ABC будут соответствовать высоты $A'D'$, $B'E'$ и $C'F'$ треугольника $A'B'C'$, а точке пересечения H высот треугольника ABC — точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$, т. е. точка O (ибо высоты треугольника $A'B'C'$ перпендикулярны

---

[1]) Если $l_1 \parallel l_2$, задача решается легко, ибо в этом случае сразу определяется радиус S.

к сторонам треугольника ABC в их серединах). Поэтому точки H и O центрально-подобны с центром подобия M и коэффициентом подобия $-\frac{1}{2}$, т. е. лежат на одной прямой с точкой M, причём M делит отрезок HO в отношении $\frac{HM}{MO}=2$.

б) Доказательство аналогично решению задачи а) и основано на том, что прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно его биссектрисам, центрально-подобны биссектрисам треугольника с центром подобия M и ко-



б)
Черт. 166, б.

эффициентом подобия $-\frac{1}{2}$ (черт. 166, б); поэтому они пересекаются в одной точке K (центрально-подобной точке Z пересечения биссектрис с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$).

в) Пусть A', B', C' — середины сторон треугольника ABC; K, K_1, K_2 и P, Q, R — точки касания сторон с вневписанной окружностью, вписанной в угол A, и с вписанной окружностью (черт. 167). Докажем, что $AK \parallel ZA'$. Обозначим стороны треугольника ABC через a, b и c, периметр — через $2p$, высоту $A\overline{P}$, опущенную на сторону BC, — через h_a, радиус вписанной окружности — через r, площадь треугольника — через S. Так как $ah_a=2pr\,(=2S)$, то $\frac{h_a}{r}=\frac{2p}{a}$. Следовательно,

$$\frac{A\overline{P}}{ZP}=\frac{2p}{a};$$

докажем, что и отношение $\frac{K\overline{P}}{A'P}$ равно той же величине.

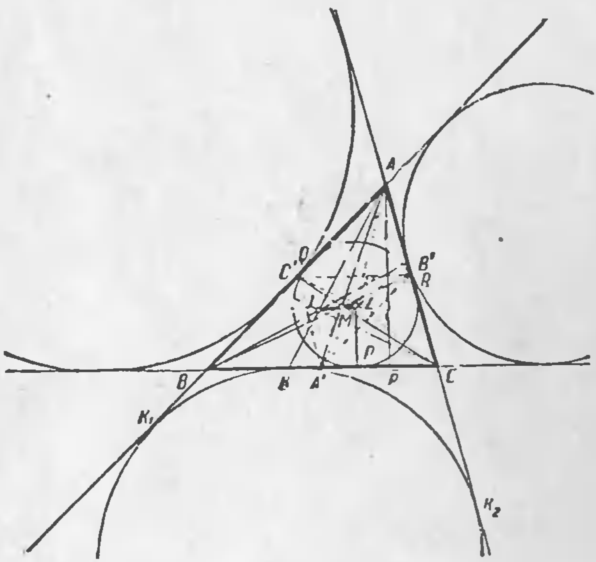
Действительно,

$$B\bar{P}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a},$$

так как $b^2=a^2+c^2-2a\cdot B\bar{P}$; с другой стороны,

$$BK=BK_1=AK_1-AB=p-c$$

(так как $AK_1=\frac{1}{2}(AK_1+AK_2)=\frac{1}{2}(AB+BK_1+AC+CK_2)=$ $=\frac{1}{2}(AB+BK+AC+CK)=\frac{1}{2}(a+b+c)=p$). Следова-



Черт. 167.

тельно, например, в случае, изображённом на черт. 167,

$$K\bar{P}=B\bar{P}-BK=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}-\frac{a+b-c}{2}=$$

$$=\frac{a^2+c^2-b^2-a^2-ab+ac}{2a}=\frac{(c-b)(c+b+a)}{2a}=\frac{p(c-b)}{a}.$$

Далее,

$$BP=\frac{1}{2}(BP+BQ)=\frac{1}{2}(BC-CP+BA-AQ)=$$
$$=\frac{1}{2}(BC+BA-CR-AR)=\frac{1}{2}(a+c-b)=p-b$$

и, следовательно,

$$A'P=BP-BA'=p-b-\frac{a}{2}=\frac{c-b}{2}.$$

Итак, имеем:

$$\frac{K\overline{P}}{A'P}=\frac{p(c-b)}{a}:\frac{c-b}{2}=\frac{2p}{a}=\frac{A\overline{P}}{ZP}.$$

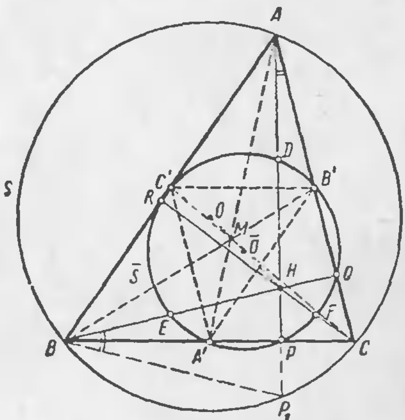
Отсюда следует, что треугольники $A\overline{P}K$ и ZPA' подобны и, значит, прямые AK и ZA' параллельны.

Далее совершенно аналогично решению предыдущей задачи показывается, что три прямые, проведённые через вершины треугольника параллельно прямым $A'Z$, $B'Z$ и $C'Z$ (по доказанному это и есть прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями), пересекаются в одной точке J, центрально-подобной Z с центром подобия M и коэффициентом подобия -2.

51. а) Пусть AP, BQ, CR — высоты треугольника ABC; A', B', C' — середины его сторон; D, E, F — середины отрезков HA, HB и HC (черт. 168, a). Ясно, что точки D, E и F лежат на окружности $\overline{S}$. Покажем теперь, что и точки P, Q и R лежат на той же окружности.

Продолжим высоту AP треугольника до пересечения с описанной окружностью в точке P_1 и соединим точку P_1 с точкой B. Из рассмотрения треугольников APC и BQC следует, что $\angle CBQ=\angle CAP$ $(=90°-\angle BCA)$. Далее, $\angle CAP=$ $=\angle CBP_1$ (как опирающиеся на одну и ту же дугу). Следовательно, $\angle HBP=\angle PBP_1$, так что треугольник HBP_1 равнобедренный и $HP=\frac{1}{2}HP_1$; отсюда видно, что точка P_1 переходит в точку P при центрально-подобном преобразовании с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Точно так же доказывается, что и точки Q и R центрально-подобны некоторым точкам описанной окружности с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Далее очевидно, что точки A', B' и C' лежат на окружности S', центрально-подобной описанной окружности S, с центром подобия M и коэффициентом подобия $-\frac{1}{2}$. Покажем, что окружность S' совпадает с окружностью $\bar{S}$. Радиус

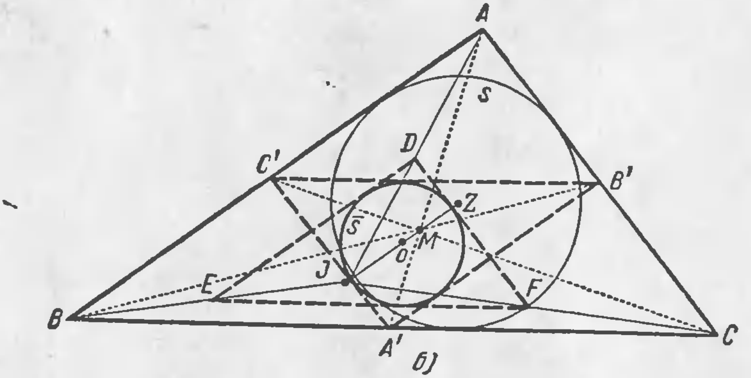


Черт. 168, *а*.

окружности $\bar{S}$ равен $\frac{r}{2}$ (r — радиус описанной окружности), а центр $\bar{O}$ находится в середине отрезка HO (O — центр описанной окружности) (черт. 168, *а*). Радиус окружности S' тоже равен $\frac{r}{2}$, центр же O' этой окружности находится на прямой MO, причём $\frac{MO'}{MO} = -\frac{1}{2}$. В силу результата задачи 50 а) точки O, H и M находятся на одной прямой и $HM = 2MO$; отсюда сразу следует, что точки $\bar{O}$ и O' совпадают, т. е. совпадают окружности $\bar{S}$ и S', что и требовалось доказать.

Заметим ещё, что A' и D, B' и E, C' и F — диаметрально противоположные точки окружности Эйлера (так как, например, вписанный в эту окружность угол $A'PD$, опирающийся на $A'D$,— прямой). Отсюда следует, что треугольники $A'B'C'$ и DEF симметричны относительно центра этой окружности и, следовательно, равны.

б) Прежде всего очевидно, что треугольник DEF центрально-подобен треугольнику ABC с центром подобия J и коэффициентом $\frac{1}{2}$ (черт. 168, *б*). Отсюда следует, что окружность $\bar{s}$, вписанная в треугольник DEF, центрально-подобна вписанной



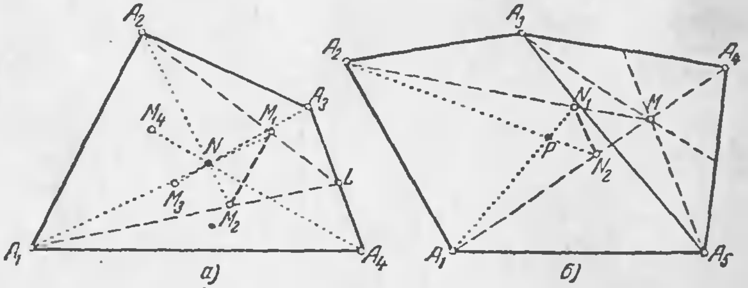
Черт. 168, *б*.

окружности s треугольника ABC с центром подобия J и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Далее, окружность s', вписанная в треугольник $A'B'C'$, центрально-подобна окружности s с центром подобия M и коэффициентом подобия $-\frac{1}{2}$. Но в силу результата задачи 50 в) середина o отрезка JZ (центр $\bar{s}$) совпадает с центром o' окружности s', лежащим на прямой MZ и таким, что $\frac{Mo'}{MZ} = -\frac{1}{2}$ (ср. с решением задачи а)). Отсюда следует, что окружности $\bar{s}$ и s' совпадают, что нам и требовалось доказать.

Заметим ещё, что прямые $A'B'$ и DE, $B'C'$ и EF, $C'A'$ и FD касаются окружности $\bar{s}$ в её диаметрально противоположных точках (ибо $A'B' \parallel AB \parallel DE$, $B'C' \parallel BC \parallel EF$, $C'A' \parallel CA \parallel FD$). Отсюда следует, что треугольники DEF и $A'B'C'$ симметричны относительно центра этой окружности и, следовательно, равны.

52. а) Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный четырёхугольник, M_4, M_3, M_2 и M_1 — центры тяжести треугольников $A_1A_2A_3$,

$A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$ (черт. 169, *а*). Нам достаточно доказать, что любые два из отрезков A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 и A_4M_4 в точке пересечения делятся в отношении $3:1$; отсюда уже будет следовать, что все эти отрезки пересекаются в одной точке. Пусть N — точка пересечения A_1M_1 и A_2M_2,



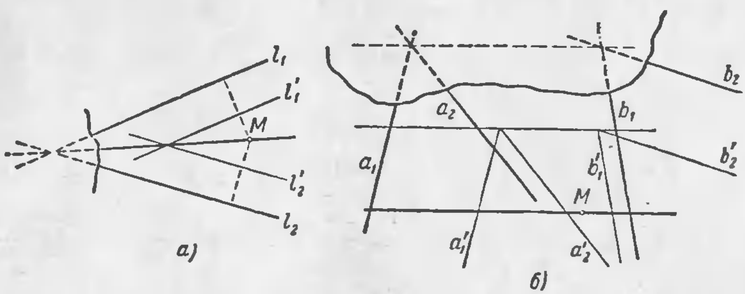
Черт. 169.

L — середина A_3A_4. В таком случае $\frac{A_1M_2}{M_2L}=\frac{A_2M_1}{M_1L}=\frac{2}{1}$; следовательно, треугольники A_1LA_2 и M_2LM_1 подобны и $M_2M_1 \parallel A_1A_2$, $\frac{A_1A_2}{M_2M_1}=\frac{3}{1}$. А теперь мы видим, что и треугольники A_1NA_2 и M_1NM_2 подобны; поэтому $\frac{A_1N}{NM_1}=\frac{A_2N}{NM_2}=\frac{3}{1}$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается теорема и для любого n-угольника. Например, если N_1 и N_2 — центры тяжести четырёхугольников $A_2A_3A_4A_5$ и $A_1A_3A_4A_5$, M — центр тяжести треугольника $A_3A_4A_5$ и P — точка пересечения A_1N_1 и A_2N_2 (черт. 169, *б*), то $\frac{A_1N_2}{N_2M}=\frac{A_2N_1}{N_1M}=\frac{3}{1}$; поэтому треугольники A_1MA_2 и N_2MN_1 подобны и $N_2N_1 \parallel A_1A_2$, $\frac{A_1A_2}{N_2N_1}=\frac{4}{1}$. Отсюда следует, что треугольники A_1PA_2 и N_1PN_2 подобны и $\frac{A_1P}{PN_1}=\frac{A_2P}{PN_2}=\frac{4}{1}$; таким образом, любые два отрезка, соединяющих вершины пятиугольника с центрами тяжести четырёхугольников, образованных остальными вершинами, в точке пересечения делятся в отношении $4:1$, откуда и вытекает справедливость утверждения, относящегося к пятиугольнику.

б), в) Из результата задачи а) вытекает, что центры тяжести четырёх треугольников, вершины которых совпадают с вершинами вписанного в окружность S четырёхугольника, лежат на одной окружности S' радиуса $\frac{R}{3}$; из результата задачи 51 а) следует, что центры окружностей Эйлера этих треугольников центрально-подобны центрам тяжести с центром подобия в центре O окружности S и коэффициентом подобия $\frac{3}{2}$; поэтому центры окружностей Эйлера лежат на окружности $\overline{S}$ радиуса $\frac{R}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{R}{2}$, откуда вытекает утверждение задачи б) для случая четырёхугольника. Далее, если N есть центр тяжести четырёхугольника, O' — центр окружности S' и $\overline{O}$ — центр $\overline{S}$, то O, N и O' лежат на одной прямой и $ON:NO'=$ $=3:1$; O, O' и $\overline{O}$ лежат на одной прямой и $O\overline{O}:OO'=3:2$. Поэтому O, N и $\overline{O}$ лежат на одной прямой и $ON:N\overline{O}=$ $=2:2$, что и требуется доказать в задаче в) для случая четырёхугольника. Теперь мы можем с помощью точно таких же рассуждений доказать справедливость утверждений задач б) и в) для случая пятиугольника и т. д.; предоставляем читателю проделать это самостоятельно.

53. а) Произведём центрально-подобное преобразование с центром в точке M и настолько малым коэффициентом подобия k, чтобы прямые l_1' и l_2', в которые перейдут прямые l_1 и l_2,



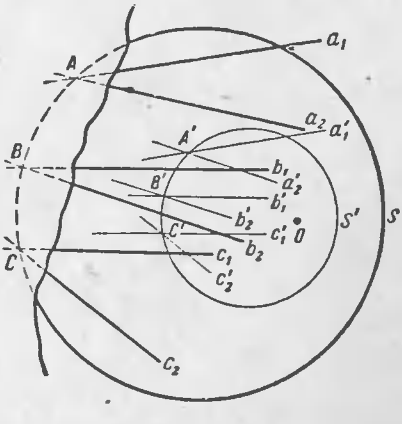
Черт. 170, *а*, *б*.

пересекались в пределах чертежа (черт. 170, *а*). Прямая, соединяющая точку M с точкой пересечения l_1' и l_2', будет искомой.

Совершенно так же решается задача, если недоступная точка задаётся не двумя прямыми, а прямой и окружностью или двумя окружностями (пересекающимися вне чертежа).

б) Произведём центрально-подобное преобразование с центром в точке M и коэффициентом k настолько малым, чтобы прямые a_1, a_2 и b_1, b_2 перешли в такие прямые a_1', a_2' и b_1', b_2', что прямая, соединяющая точки пересечения a_1' и a_2', b_1' и b_2', находилась в пределах чертежа (черт. 170, *б*). Прямая, проведённая через M параллельно ей, и будет искомой.

в) Произведём центрально-подобное преобразование с центром в любой доступной нам точке плоскости O и настолько малым коэффициентом k, чтобы точки A, B, C перешли в точки A', B', C', расположенные в пределах чертежа (черт. 170, *в*). Пусть S' — окружность, описанная вокруг треугольника $A'B'C'$. Искомая окружность S центрально-подобна окружности S' с центром подобия O и коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$; это позволяет найти её центр и радиус.



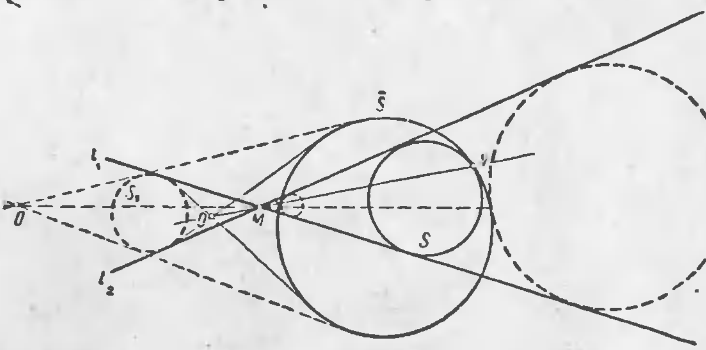
в)

Черт. 170, *в*.

54. Пусть нам требуется на ограниченной части $\mathcal{K}^\circ$ плоскости произвести некоторое построение, и пусть чертёж T, требуемый для выполнения этого построения, не помещается целиком на $\mathcal{K}^\circ$. Произведём центрально-подобное преобразование с центром в точке O, расположенной в области $\mathcal{K}^\circ$, и коэффициентом k настолько малым, чтобы преобразованный чертёж T' уже целиком помещался в $\mathcal{K}^\circ$. Чертёж T' можно построить. После этого чертёж T можно считать выполненным, так как он центрально-подобен имеющемуся уже чертежу T' с известным центром O и коэффициентом $\frac{1}{k}$. [Если какая-либо точка A чертежа T, центрально-подобная точке A' чертежа T', не помещается на нашей части плоскости, то определим её парой прямых l_1 и l_2, центрально-подобных каким-то прямым l'_1 и l'_2, проходящим через A'; при этом l'_1 и l'_2 всегда можно выбрать так, чтобы l_1 и l_2 помещались на чертеже: для этого достаточно, например, чтобы расстояния прямых l'_1 и l'_2 от центра подобия O были достаточно малы.]

55. Это предложение является частным случаем теоремы о трёх центрах подобия (см. выше, стр. 93).

56. Пусть S — искомая окружность; построим произвольную окружность S_1, касающуюся l_1 и l_2 (черт. 171; мы не

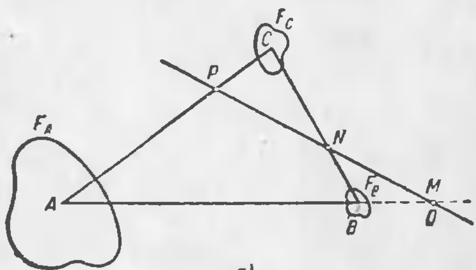


Черт. 171.

рассматриваем здесь случая $l_1 \parallel l_2$, когда решение задачи значительно упрощается). Центром подобия окружностей S и S_1 является точка M пересечения l_1 и l_2; центр подобия O окружностей S_1 и $\bar{S}$ можно построить; центром подобия окружностей $\bar{S}$ и S является точка их касания N. Согласно теореме о трёх центрах подобия (см. стр. 93) точки M, O и N лежат на одной прямой, т. е. N есть точка пересечения прямой OM с окружностью $\bar{S}$. Найдя точку N, мы без труда построим окружность S.

Центр подобия O окружностей $\bar{S}$ и S_1 можно выбирать двумя способами; каждая из двух полученных прямых OM может пересечь $\bar{S}$ в двух точках; таким образом, можно построить до четырёх окружностей, удовлетворяющих условию задачи; центры этих окружностей лежат на биссектрисе одного из двух смежных углов, образованных l_1 и l_2 (на этой биссектрисе лежит центр окружности S_1). Выбрав затем в качестве S_1 окружность с центром на биссектрисе другого угла, мы можем найти ещё до четырёх решений. Таким образом, всего задача может иметь до восьми решений.

57. а) Пусть F_A — какая-то фигура, содержащая вершину A треугольника; F_C получается из F_A центрально-подобным преобразованием с центром P и коэффициентом $k_1 = \frac{PC}{PA}$; F_B получается из F_C центрально-подобным преобразованием с центром N и коэффициентом $k_2 = \frac{NB}{NC}$ (черт. 172, a). Очевидно,



а)

Черт. 172, a.

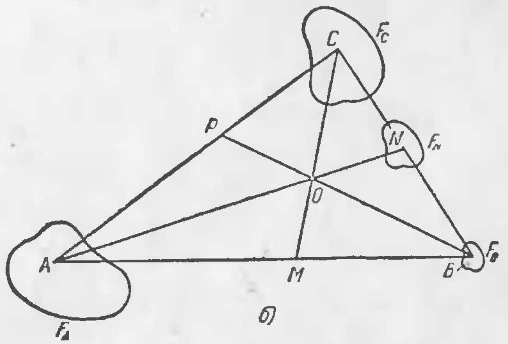
точке A фигуры F_A отвечает точка C фигуры F_C; последней точке отвечает точка B фигуры F_B. В силу теоремы о сложении центрально-подобных преобразований, F_B получается из F_A центрально-подобным преобразованием с центром O и коэффициентом k; при этом O лежит на прямой BA (ибо B и A — соответствующие друг другу точки фигур F_B и F_A) и на прямой PN (в силу теоремы о трёх центрах подобия), а $k = k_1 k_2 = \frac{PC}{PA} \cdot \frac{NB}{NC}$ (если $k_1 k_2 = 1$, то F_B получается из F_A параллельным переносом).

Если $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = 1$, то $\frac{MB}{MA} = \frac{PC}{PA} \cdot \frac{NB}{NC} = k_1 k_2 = k$; так как $\frac{OB}{OA} = k$, то M совпадает с O и, следовательно, лежит на прямой PN. Обратно, если точки M, N и P лежат на одной прямой, то M есть точка пересечения прямых AB и PN и, значит, совпадает с O; поэтому $\frac{MB}{MA}=\frac{OB}{OA}=k=k_1k_2=$ $=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{NB}{NC}$ и, следовательно, $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$.

Примечание 1. Отметим, что в решении задачи 57 а) было бы достаточно доказать только необходимость или только достаточность условия задачи; второе уже будет следовать из доказанного. Действительно, пусть, например, мы уже доказали, что если $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$, то точки M, N и P лежат на одной прямой. Предположим теперь, что точки M, N и P лежат на одной прямой; покажем, что в таком случае $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$. Действительно, пусть $\overline{M}$ — такая точка прямой AB, что $\frac{A\overline{M}}{B\overline{M}}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$; тогда, по теореме, которую мы считаем уже доказанной, точки $\overline{M}$, N и P лежат на одной прямой; отсюда следует, что $\overline{M}$ совпадает с M и, значит, $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$. Аналогично выводится достаточность условия задачи из его необходимости; вывод предоставляется читателю.

Примечание 2. Теорему Менелая можно связать со следующим обобщением задачи 13 из § 2 гл. I (стр. 30—31): построить n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, зная n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, делящих его стороны в известных (положительных или отрицательных) отношениях $\frac{A_1M_1}{A_2M_1}=k_1$, $\frac{A_2M_2}{A_3M_2}=k_2, \ldots, \frac{A_nM_n}{A_1M_n}=k_n$ (здесь уже нет необходимости предполагать число сторон n-угольника нечётным). Совершенно аналогично второму решению задачи 13 можно показать, что если $k_1k_2\ldots k_n\neq 1$, то эта задача всегда имеет единственное решение; если же $k_1k_2\ldots k_n=$ $=1$, то задача, вообще говоря, не имеет решений, и лишь при некоторых специальных расположениях точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ решение задачи будет неопределённым. Отсюда следует, что если $k_1k_2\ldots k_n\neq 1$, то расположение точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ на плоскости может быть любым; если же $k_1k_2\ldots k_n=\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdots\frac{A_nM_n}{A_1M_n}=1$, то это расположение должно удовлетворять специальным условиям. При $n=3$ в силу теоремы о трёх центрах подобия эти условия сводятся к тому, что точки M_1, M_2 и M_3 должны лежать на одной прямой; отсюда и вытекает теорема Менелая.

б) Пусть прямые CM, AN и BP пересекаются в одной точке O (черт. 172, *б*). Рассмотрим какую-то фигуру F_A, содержащую точку A; пусть центрально-подобное преобразование с центром O и коэффициентом $k=\frac{ON}{OA}$ переводит её в фигуру F_N (точке A фигуры F_A отвечает точка N фигуры F_N); центрально-подобное преобразование с центром B и коэффициентом $k_1=\frac{BC}{BN}$ переводит F_N в F_C (точке N фигуры F_N отвечает точка C фигуры F_C); центрально-подобное преобразование с центром C и коэффициентом $k_2=\frac{CB}{CN}$ переводит F_N в F_B (точке N фигуры F_N отвечает точка B фигуры F_B). В силу



Черт. 172, *б*.

теоремы о сложении центрально-подобных преобразований фигура F_C центрально-подобна F_A; при этом центр подобия лежит на прямой CA (C и A — соответствующие точки фигур F_C и F_A) и на прямой BO (в силу теоремы о трёх центрах подобия), т. е. совпадает с P, а коэффициент подобия равен $kk_1=\frac{ON}{OA}\cdot\frac{BC}{BN}$. Точно так же показывается, что фигуры F_B и F_A центрально-подобны с центром M и коэффициентом $kk_2=\frac{ON}{OA}\cdot\frac{CB}{CN}$. Таким образом, получаем:

$$\frac{PC}{PA}=\frac{ON}{OA}\cdot\frac{BC}{BN},\quad \frac{MB}{MA}=\frac{ON}{OA}\cdot\frac{CB}{CN};$$

деля первое равенство на второе, имеем:

$$\frac{PC}{PA}\cdot\frac{MA}{MB}=-\frac{CN}{BN} \quad \text{или} \quad \frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA}=-1,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA}=-1$ и, например, прямые AN и BP пересекаются в точке O. Если $\overline{M}$ — точка пересечения CO с AB, то, по доказанному выше, $\frac{\overline{M}A}{\overline{M}B}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA}=-1$, т. е. $\overline{M}$ совпадает с M. Таким образом, мы видим, что если $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA}=-1$, то прямые AN, BP и CM все пересекаются в одной точке или никакие две из трёх прямых не пересекаются (т. е. все прямые параллельны).

Предположим, наконец, что прямые AN, BP и CM все параллельны между собой; пусть $\overline{M}$ — такая точка стороны AB, что $\frac{\overline{M}A}{\overline{M}B}\frac{NB}{NC}\frac{PC}{PA}=-1$. В таком случае прямая $C\overline{M}$ не может пересечь AN и BP (иначе все три прямые AN, BP и $C\overline{M}$ должны были бы пересечься в одной точке); поэтому $\overline{M}$ совпадает с M и $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA}=-1$.

Примечание. Нетрудно видеть, что разобранное доказательство теоремы Чева сводится к двукратному применению теоремы Менелая к треугольникам ANC (точки на сторонах — P, O и B) и ANB (точки на сторонах — M, O и C).

58. а) Согласно теореме задачи 52 а) четырёхугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $M_1M_2M_3M_4$, где M_1, M_2, M_3 и M_4 — точки пересечения медиан треугольников $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$, центрально-подобны с коэффициентом подобия $-\frac{1}{3}$ (и центром подобия в центре тяжести N четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$).

Далее из результата задачи 50 а) следует, что четырёхугольники $M_1M_2M_3M_4$ и $H_1H_2H_3H_4$, где H_1, H_2, H_3, H_4 — точки пересечения высот тех же треугольников, центрально-подобны с центром подобия в центре O окружности S и коэффициентом подобия $\frac{3}{1}$. Таким образом, четырёхугольник $H_1H_2H_3H_4$ можно получить из $A_1A_2A_3A_4$ с помощью двух последовательных центрально-подобных преобразований с коэффициентами $k_1=-\frac{1}{3}$ и $k_2=3$; из того, что сумма этих преобразований есть центрально-подобное преобразование с коэффициентом подобия $k_1 k_2 = -1$, т. е. симметрия относительно точки, и вытекает утверждение задачи 33 а).

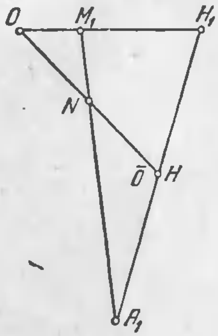
Примечание. Из теоремы о трёх центрах подобия вытекает, что точка H задачи 33 а) лежит на одной прямой с центром тяжести N и центром описанного круга O; нетрудно показать, что N есть середина OH (см., например, выше, стр. 93).

б) Решение задачи б) аналогично решению задачи а). При этом приходится использовать то обстоятельство, что центр $\overline{O}$ окружности девяти точек треугольника находится на одной прямой с центром O описанной окружности и точкой H пересечения его высот, причём $\frac{O\overline{O}}{OH} = \frac{1}{2}$ (см. решение задачи 51 а)).

59. а) Рассмотрим четвёрку точек A_1, A_2, A_3 и H_4. Из этих четырёх точек можно образовать четыре треугольника $A_1A_2A_3$, $A_1A_2H_4$, $A_1A_3H_4$ и $A_2A_3H_4$. Докажем, что окружности Эйлера этих треугольников совпадают между собой. Действительно, радиусы окружностей Эйлера треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3H_4$ равны половине радиусов окружностей, описанных около этих треугольников; они равны, так как окружности, описанные около треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3H_4$, симметричны относительно прямой A_2A_3 (см. решение задачи 32 б)). Далее, центр первой окружности Эйлера находится в середине отрезка H_4O, где O — центр S; центр второй окружности находится в середине отрезка A_1O_1, где O_1 — центр окружности, описанной около $\triangle A_2A_3H_4$ (ибо A_1 есть точка пересечения высот треугольника $A_2A_3H_4$). А так как середины этих отрезков совпадают (четырёхугольник $A_1H_4O_1O$ есть параллелограмм; см. решение задачи 32 в)), то центры окружностей Эйлера совпадают и, следовательно, совпадают и сами окружности. Так же доказывается, что окружности Эйлера треугольников $A_1A_2H_4$ и $A_1A_3H_4$ совпадают с окружностью Эйлера треугольника $A_1A_2A_3$.

Аналогично показывается, что каждая из рассматриваемых 32 окружностей Эйлера совпадает с окружностью Эйлера одного из треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$, $H_1H_2H_3$, $H_1H_2H_4$, $H_1H_3H_4$ и $H_2H_3H_4$.

б) Равенство всех окружностей Эйлера вытекает из результатов задач 52 б) и 33 а). То, что эти окружности по 4 пересекаются в точках $\bar{O}$ и $\bar{O}'$, следует из задачи 52 б). Далее, точки $\bar{O}$ и $\bar{O}'$ симметричны относительно середины H отрезка A_1H_1 (см. задачу 33 а)); $\bar{O}$ лежит на продолжении ON за точку N, причём $ON = N\bar{O}$ (N — точка, делящая отрезок A_1M_1, где M_1 есть точка пересечения медиан $A_1A_2A_3$, в отношении $A_1N : NM_1 = 3:1$; см. задачу 52 в)). Отсюда и из того, что $OM_1 : M_1H_1 = 1:2$ (см. задачу 50 а)), вытекает, что $\bar{O}$ совпадает с H (см. черт. 173), а значит, $\bar{O}'$ совпадает с $\bar{O}$.



Черт. 173.

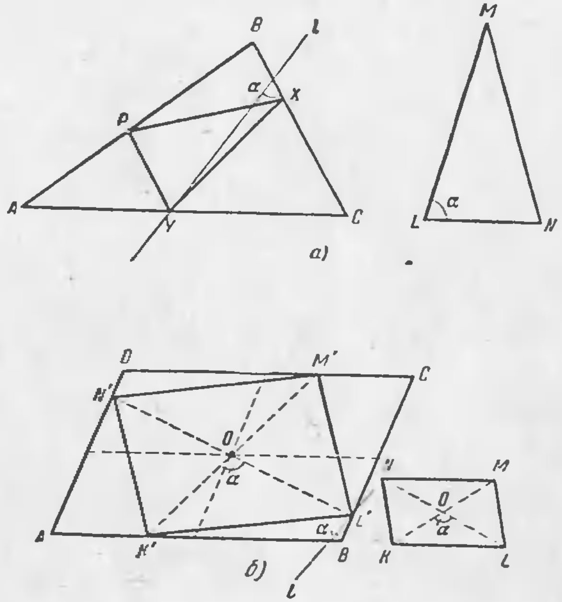
в) Легко выводится из результатов задач 33 а) и 58 б).

§ 2

60. а) Предположим, что треугольник PXY построен (черт. 174, *а*). Точка Y получается из X при помощи центрально-подобного вращения с центром вращения P, углом поворота α, равным углу L треугольника LMN, и коэффициентом подобия k, равным отношению сторон $\frac{LN}{LM}$ этого треугольника. Отсюда следует, что точка Y лежит на прямой l, получаемой из BC центрально-подобным вращением с центром P, углом поворота α и коэффициентом подобия k, а так как она лежит на стороне AC, то Y есть точка пересечения прямых l и CA. Если l параллельна CA, задача решения не имеет; если l совпадает с CA, то решение является неопределённым.

б) Заметим, что если параллелограмм $K'L'M'N'$ вписан в параллелограмм $ABCD$ (черт. 174, *б*), то точки пересечения диагоналей (центры) O' и O обоих параллелограммов совпадают: о б щ а я с е р е д и н а диагоналей $K'M'$ и $L'N'$ лежит на обеих средних линиях параллелограмма $ABCD$, т. е. совпадает с его центром O.

Пусть теперь $K'L'M'N'$ — искомый параллелограмм; в таком случае треугольник $K'O'L'$ подобен $\triangle K\bar{O}L$, где $\bar{O}$ — центр параллелограмма $KLMN$. Центрально-подобное вращение с центром O, углом поворота $K\bar{O}L$ и коэффициентом подобия $\frac{\bar{O}L}{\bar{O}K}$ переводит сторону AB параллелограмма $ABCD$ в прямую l,



Черт. 174.

пересечение которой с прямой BC и определит вершину L' искомого параллелограмма (ср. с решением задачи а)).

61. Соединим вторую точку B пересечения S_1 и S_2 с точками M_1 и M_2, O_1 и O_2 (черт. 175). Треугольник BM_1M_2 будет подобен $\triangle BO_1O_2$ (ибо $\angle BO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle BO_1A = \angle BM_1A$, $\angle BO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle BO_2A = \angle BM_2A$); следовательно, он получается из BO_1O_2 центрально-подобным вращением с центром B, углом поворота α, равным $\angle M_1BO_1$, и коэффициентом подобия $k = \frac{BM_1}{BO_1}$. Опишем вокруг треугольников BO_1O_2 и BM_1M_2

окружности S и S'; так как

$$\angle BM_1N + \angle BM_2N = \\ = (\angle BM_1M_2 + \angle BM_2M_1) + (\angle NM_1M_2 + \angle NM_2M_1) = \\ = (\angle BM_1M_2 + \angle BM_2M_1) + (M_1BA + \angle M_2BA) = \\ = \angle BM_1M_2 + \angle BM_2M_1 + \angle M_1BM_2 = 180°,$$

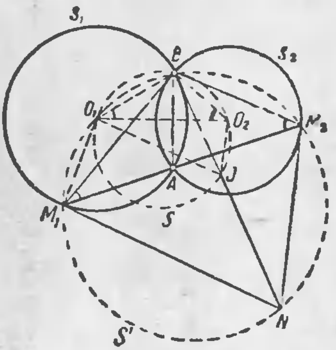
то S' пройдёт через точку N; так как

$$\angle O_1BO_2 + \angle O_1JO_2 = \angle M_1BM_2 + \angle M_1NM_2 = 180°,$$

то S пройдёт через точку J. Далее имеем:

$$\angle NBM_1 = \angle NM_2M_1, \quad \angle JBO_1 = \angle JO_2O_1;$$

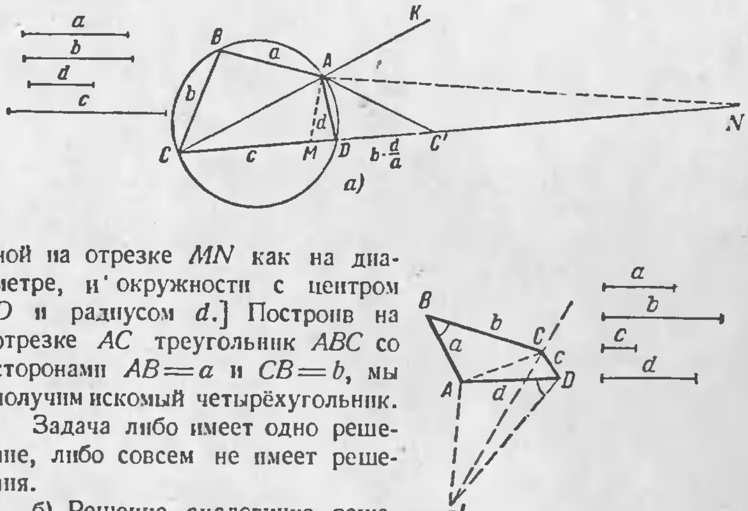
таким образом, разность углов NBM_1 и JBO_1 равна разности углов NM_2M_1 и JO_2O_1, которые образуют отрезки M_2M_1 и O_2O_1, соответствующие друг другу в указанном центрально-подобном вращении, с одним и тем же направлением $M_2N \parallel O_2J$. Поэтому разность углов NBM_1 и JBO_1 равна углу между M_2M_1 и O_2O_1, т. е. углу поворота α. Но из того, что $\angle NBM_1 - \angle JBO_1 = \alpha = = \angle M_1BO_1$, следует, что прямая NJ проходит через B, т. е. первое утверждение задачи.



Черт. 175.

Для доказательства второго утверждения задачи достаточно заметить, что $JO_1 \parallel NM_1 \perp O_1M_1$ и $\angle JNM_1 = \angle M_1M_2B = = \angle O_1O_2B$; таким образом, мы видим, что отрезок JN образует с прямой O_1M_1 угол $90° - \angle O_1O_2B$ и проектируется ортогонально на эту прямую в отрезок O_1M_1 постоянной длины r_1 (r_1 — радиус S_1). Отсюда следует, что $JN = r_1 \cos(90° - \angle O_1O_2B) = r_1 \sin \angle O_1O_2B$ и, очевидно, не зависит от выбора прямой M_1AM_2.

62. а) Пусть четырёхугольник $ABCD$ построен (черт. 176, *а*). Центрально-подобное вращение с центром A, коэффициентом подобия $\frac{d}{a}$ и углом поворота BAD переводит треугольник ABC в треугольник ADC', где точка C' лежит на продолжении прямой CD (ибо $\angle ADC + \angle ABC = 180°$). В треугольнике ACC' известны отрезки $CD = c$, $DC' = b\frac{d}{a}$, $DA = d$ и отношение боковых сторон $\frac{AC'}{AC} = \frac{d}{a}$; поэтому его можно построить. [Отложим отрезок CC'. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника ACC' при вершине A пересекают прямую CC' в точках M и N таких, что $\frac{C'M}{CM} = \frac{C'N}{CN} = \frac{d}{a}$; эти точки можно построить. Так как $\angle MAN = 90°$, то вершина A есть точка пересечения окружности, построенной на отрезке MN как на диаметре, и окружности с центром D и радиусом d.] Построив на отрезке AC треугольник ABC со сторонами $AB = a$ и $CB = b$, мы получим искомый четырёхугольник.



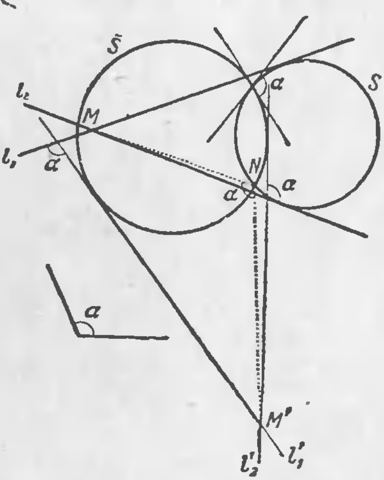
Черт. 176.

Задача либо имеет одно решение, либо совсем не имеет решения.

б) Решение аналогично решению задачи а). Пусть четырёхугольник $ABCD$ построен (черт. 176, *б*); центрально-подобное вращение с центром A, коэффициентом подобия $\frac{d}{a}$ и углом поворота BAD переводит треугольник ABC в треугольник ADC', где точка C' определяется тем, что $\angle CDC' = \angle B + \angle D$

и $DC' = b \cdot \frac{d}{a}$. Построив треугольник CDC', мы можем найти точку A как пересечение окружности, построенной как на диаметре на отрезке MN (где M и N — две точки прямой CC' такие, что $\frac{C'M}{CM} = \frac{C'N}{CN} = \frac{d}{a}\Big)$, и окружности с центром в точке D и радиусом d.

63. Предположим, что задача решена (черт. 177). Центрально-подобное вращение с центром в точке N пересечения окружности $\overline{S}$ и искомой окружности S, углом поворота α и коэффициентом подобия, равным отношению радиусов окружностей $\overline{S}$ и S, переводит S в $\overline{S}$. При этом преобразовании прямые l_1 и l_2 перейдут в прямые l_1' и l_2', касающиеся окружности $\overline{S}$ и образующие с прямыми l_1, соответственно l_2, угол α; точка M пересечения l_1 и l_2 перейдёт в точку M' пересечения прямых l_1' и l_2'[1]. Следовательно, $\angle MNM' = \alpha$.



Черт. 177.

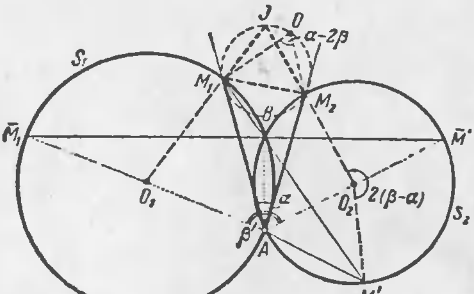
Отсюда вытекает следующее построение. Проводим касательные l_1' и l_2' к окружности $\overline{S}$, образующие с прямыми l_1 и l_2 соответственно угол α; пусть M' есть точка их пересечения, N — точка пересечения окружности $\overline{S}$ с дугой окружности, стягиваемой хордой MM' и вмещающей угол α. Центрально-подобное вращение с центром N, углом поворота α и коэффициентом подобия $\frac{NM'}{NM}$

[1]) Если $l_1 \parallel l_2$, то решение задачи значительно упрощается, ибо мы сразу можем найти радиус r искомой окружности S, а центр окружности радиуса r, пересекающей $\overline{S}$ под углом α, лежит на одной из двух определённых окружностей, концентрических с $\overline{S}$. Задача может иметь в этом случае до четырёх решений.

переводит окружность $\bar{S}$ в искомую окружность S. Задача может иметь до восьми решений.

64. Пусть A, B, C, D, E, F — точки пересечения наших прямых (см. черт. 83 в тексте). Центр O центрально-подобного вращения, переводящего AB в EF, можно найти как точку пересечения окружностей, описанных около треугольников AEC и BFC, или как точку пересечения окружностей, описанных около треугольников ABD и EFD (ср. выше, черт. 81, *б* и 82, стр. 105—106). Отсюда следует, что эти четыре окружности пересекаются в одной точке.

65. а) Выясним, как получается точка M_2 из точки M_1. Соединим M_1 со второй точкой B пересечения S_1 и S_2; пусть M_1B пересекает S_2 в точке M' (черт. 178). Точка M' получается из M_1 одним и тем же центрально-подобным вращением независимо от положения угла; это следует из того,



Черт. 178.

что форма треугольника M_1AM' не зависит от положения точки M_1 (угол AM_1M' измеряется половиной дуги AB окружности S_1, угол $AM'M_1$ измеряется половиной дуги AB окружности S_2). Проведя $\bar{M}_1\bar{M}' \perp AB$ (так что $A\bar{M}_1$ и $A\bar{M}'$ — диаметры окружностей), легко убедиться, что угол поворота β этого центрально-подобного вращения равен $\angle O_1AO_2$, а коэффициент подобия k равен $\frac{AO_2}{AO_1}$. Далее, $\angle M'AM_2 = \beta - \alpha$ [1]), $\angle M'O_2M_2 = 2(\beta - \alpha)$. Таким образом, M_2 полу-

[1]) Или $\alpha - \beta$ (см. сноску [2]) на стр. 50).

чается из M_1 в результате центрально-подобного вращения, с центром A, углом поворота β и коэффициентом подобия k (переводящего M_1 в M') и последующего вращения с центром O_2 и углом поворота $2(\beta-\alpha)$ (переводящего M' в M_2). Но сумма этих двух преобразований представляет собой новое центрально-подобное вращение с каким-то центром O, коэффициентом подобия k и углом поворота $-\beta+2(\beta-\alpha)=$ $=\beta-2\alpha$ (на черт. 178 направления вращений от AM_1 к AM' и от O_2M' к O_2M_2 противоположны). Теперь остаётся только заметить, что

$$\begin{aligned}
&\angle M_1JM_2 = \\
&=(\angle AM_1M_2+\angle AM_2M_1)+(\angle O_1M_1A+\angle O_2M_2A)-180^\circ= \\
&=(180^\circ-\angle M_1AM_2)+(\angle O_1AM_1+\angle O_2AM_2)-180^\circ= \\
&=(180^\circ-\alpha)+(\beta-\alpha)-180^\circ=\beta-2\alpha,
\end{aligned}$$

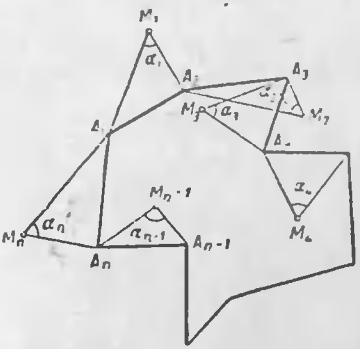
и следовательно, описанная вокруг треугольника M_1M_2J окружность проходит через точку O.

б) Центрально-подобное вращение с центром A, углом поворота $\beta=\angle O_1AO_2$ и коэффициентом подобия $k=\frac{AO_2}{AO_1}$ переводит O_1 в O_2; последующее вращение вокруг O_2 на угол $2(\beta-\alpha)$ оставляет O_2 на месте. Отсюда следует, что $\angle O_1OO_2=\beta-2\alpha$ и $\frac{OO_2}{OO_1}=\frac{AO_2}{AO_1}$ (см. решение задачи а)). Из того, что отношение $\frac{OO_2}{OO_1}=\frac{AO_2}{AO_1}$ постоянно, следует, что геометрическим местом точек O является окружность (см. сноску на стр. 102); эта окружность проходит через точки A (O совпадает с A, когда $\alpha=\beta$) и B (O совпадает с B, когда $\alpha=0$).

66. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ есть искомый n-угольник (черт. 179). По условию задачи нам даны точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$, известны углы $A_1M_1A_2=\alpha_1$, $A_2M_2A_3=\alpha_2$, $\ldots$, $A_nM_nA_1=\alpha_n$ и отношения $\frac{M_1A_2}{M_1A_1}=k_1$, $\frac{M_2A_3}{M_2A_2}=k_2$, $\ldots$, $\frac{M_nA_1}{M_nA_n}=k_n$. Произведём последовательно центрально-подобное вращение с центром M_1, углом поворота α_1 и коэффициентом подобия k_1, центрально-подобное вращение с центром M_2, углом поворота α_2 и коэффициентом подобия k_2 и т. д., наконец, центрально-

подобное вращение с центром M_n, углом поворота α_n и коэффициентом подобия k_n. При этом точка A_1 последовательно займёт положения A_2, A_3, ..., A_n и, наконец, A_1. Таким образом, A_1 есть неподвижная точка суммы n центрально-подобных вращений с центрами M_1, M_2, ..., M_n, углами поворота α_1, α_2, ..., α_n и коэффициентами подобия k_1, k_2, ..., k_n.

Эта сумма центрально-подобных вращений представляет собой, вообще говоря, новое центрально-подобное вращение (с углом поворота $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ и коэффициентом подобия $k_1 k_2 \ldots k_n$). Так как единственной неподвижной точкой центрально-подобного вращения является его центр, то A_1 совпадает с центром результирующего центрально-подобного вращения. Его можно найти, повторив $n - 1$ раз построение, определяющее центр центрально-подобного вращения, представляющего собой сумму двух известных центрально-подобных вращений (см. стр. 104—106). Ещё проще найти отрезок $B'C'$, в который переводит сумма n центрально-подобных вращений произвольно выбранный отрезок BC плоскости, и затем построить центр центрально-подобного вращения, переводящего BC в $B'C'$ (см. стр. 105—106). Найдя A_1, мы без труда построим и остальные вершины n-угольника.

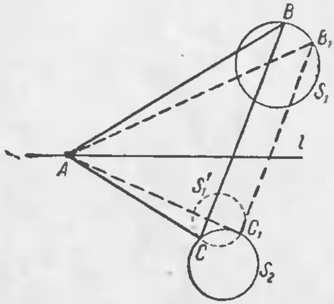


Черт. 179.

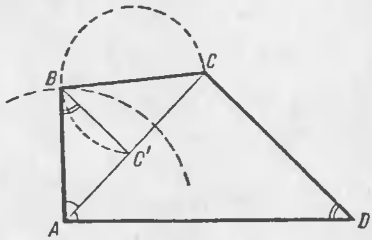
Если $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ кратно 360° и $k_1 k_2 \ldots k_n = 1$, то сумма центрально-подобных вращений будет представлять собой параллельный перенос. Так как параллельный перенос вовсе не имеет неподвижных точек, то задача при этом не будет иметь решения.

Может случиться, что сумма рассматриваемых центрально-подобных вращений будет представлять собой тождественное преобразование (параллельный перенос на нулевое расстояние). В этом случае задача будет неопределённа: за вершину A_1 искомого n-угольника можно будет принять любую точку плоскости.

67. Пусть треугольник ABC построен (черт. 180). Точка B переводится в точку C центрально-подобной симметрией с центром A, осью l и коэффициентом подобия $\frac{n}{m}$. Поэтому точка C лежит одновременно и на окружности S_2 и на окружности S_1', получаемой из S_1 этой центрально-подобной симметрией (черт. 180). Задача может иметь два, одно или ни одного решения.



Черт. 180.



Черт. 181.

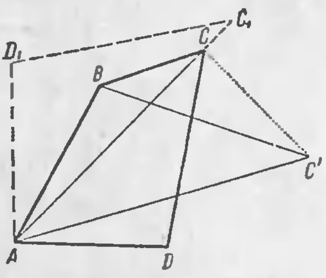
68. Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ построен. Центрально-подобная симметрия с центром A, осью AC и коэффициентом подобия $\frac{AB}{AD}$ переводит треугольник ADC в треугольник ABC' (черт. 181).

а) AC и $AC' = AC \cdot \frac{AB}{AD}$ нам известны; следовательно, мы можем отложить эти отрезки на какой-то прямой. Далее, $\angle ABC' = \angle ADC$; значит, $\angle C'BC$, равный $\angle ABC - \angle ADC = \angle B - \angle D$, нам известен; поэтому B можно найти как точку пересечения дуги окружности, стягиваемой хордой $C'C$ и вмещающей угол, равный $\angle B - \angle D$, и окружности с центром A и радиусом, равным AB. После этого легко найти вершину D. Задача может иметь не более одного решения.

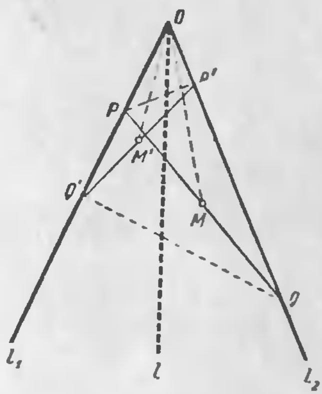
б) Так как стороны BC и $BC' = DC \cdot \frac{AB}{AD}$ и $\angle C'BC$, равный $\angle B - \angle D$, треугольника CBC' известны, то этот треугольник можно построить. Вершина A находится как такая точка на прямой CC', что $\frac{AC'}{AC} = \frac{AB}{AD}$. Задача имеет единственное решение.

в) В этом случае известно отношение $BC:BC' = BC:\left(CD\cdot\frac{AB}{AD}\right)=\frac{BC}{CD}\cdot\frac{AD}{AB}$. Точку B можно найти как точку пересечения геометрического места точек, отношение расстояний от которых до точек C и C' имеет заданное значение $\frac{BC}{CD}\cdot\frac{AD}{AB}$ (см. сноску на стр. 102), и окружности с центром A и радиусом AB. Задача может иметь не более одного решения.

69. Центрально-подобная симметрия с центром A, осью AC и коэффициентом подобия $\frac{AB}{AD}$ и последующее вращение с центром A и углом поворота γ переводят треугольник ADC в треугольник ABC' (см. черт. 182). Далее построение производится аналогично решению задачи 68. [При этом в решении задачи, аналогичной задаче 68 б), вершина A находится как пересечение геометрического места точек, отношение расстояний которых до точек C', и C имеет известное значение $\frac{AB}{AD}$, и дуги, стягиваемой хордой CC' и вмещающей угол α.]



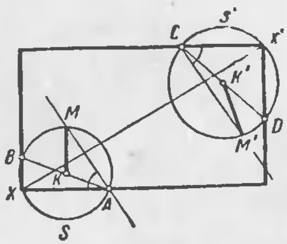
Черт. 182.



Черт. 183.

70. Пусть l_1 и l_2 пересекаются в точке O, образуя угол α (черт. 183). [Если $l_1 \parallel l_2$, то задача не имеет смысла: в этом случае отрезок PQ существует лишь тогда, когда точка M равноудалена от l_1 и от l_2, т. е. M не может описывать окружность.] Треугольники OPP' и OQQ' подобны (прямоугольные треугольники с общим острым углом); следовательно, $\frac{OP}{OP'}=\frac{OQ}{OQ'}$. Отсюда $\frac{OP}{OQ}=\frac{OP'}{OQ'}$, т. е. треугольники OPQ и $OP'Q'$ тоже подобны; поэтому треугольники OPM и $OP'M'$ тоже подобны (OM и OM' — медианы OPQ и $OP'Q'$). Значит, отношение $\frac{OM'}{OM}=\frac{OP'}{OP}=\cos\alpha$ не зависит от выбора точки M и $\angle M'OP'=\angle MOP$, т. е. OM и OM' образуют равные углы с биссектрисой l угла POQ. Таким образом, M' получается из M при помощи центрально-подобной симметрии с центром O, осью l и коэффициентом $k=\cos\alpha$; поэтому, когда M описывает окружность S, точка M' описывает окружность S'.

71. а) Если X и X' — противоположные вершины искомого прямоугольника (черт. 184), то они лежат соответственно на окружностях S и S' с диаметрами AB и CD. Эти окружности можно рассматривать как собственно-подобные фигуры с соответствующими точками X и X'. В силу теоремы 1 (стр. 111) существует центрально-подобное вращение (или параллельный перенос), переводящее S в S', так что точка X переходит в точку X'. Это центрально-подобное вращение можно определить следующим образом. Проведём через точки A и C произвольные, параллельные между собой прямые, пересекающие окружности S и S' соответственно в точках M и M'. Углы MAX и $M'CX'$ равны как углы с параллельными сторонами; поэтому дуга MX окружности S равна по угловой мере дуге $M'X'$ окружности S' и, следовательно, наше центрально-подобное вращение переводит точку M в точку M'. А так как оно переводит центр K окружности S в центр K' окружности S', то задача сводится к тому, чтобы найти центрально-подобное вращение (или параллельный перенос), переводящее известный отрезок KM в другой известный отрезок $K'M'$ (см. выше, стр. 105—106).



Черт. 184

Если O — центр, α — угол вращения, а k — коэффициент подобия этого центрально-подобного вращения, то

$$\triangle OMM' \sim \triangle OXX' \left(\angle MOM' = \angle XOX' = \alpha, \frac{OM'}{OM} = \frac{OX'}{OX} = k \right).$$

Так как известна сторона XX' треугольника OXX', то можно найти сторону OX, и точка X находится как пересечение окружности S и окружности с центром O и радиусом OX. Задача может иметь два, одно или ни одного решения; при этом точки A, B, C, D могут лежать на сторонах построенного прямоугольника или на их продолжениях.

Особым является тот случай, когда отрезок KM переводится в отрезок $K'M'$ параллельным переносом (или, другими словами, когда отрезки AB и CD равны, параллельны и одинаково направлены). В этом случае задача не будет иметь решения, если величина параллельного переноса не равна заданной длине диагонали прямоугольника, и будет неопределённой в противном случае (за вершину X искомого прямоугольника можно будет принять любую точку окружности S).

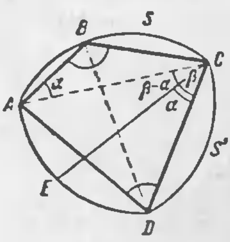
б) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ построен (черт. 185, *а*). Вершины B и D его лежат на дугах S и S' окружностей, построенных на диагонали AC и вмещающих углы, равные заданным углам B и D. Обозначим угол BAC через α, а угол DCA через β. Тогда из треугольника ABC будем иметь

$$\alpha + \angle B + \angle C - \beta = 180^\circ,$$

откуда

$$\beta - \alpha = \angle B + \angle C - 180^\circ,$$

т. е. величина $\beta - \alpha$ известна. Пусть для определённости $\beta - \alpha > 0$; проведём через точку C прямую таким образом,

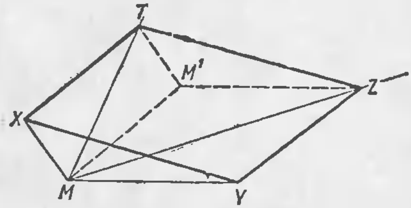


Черт. 185, *а*.

чтобы угол между этой прямой и диагональю CA был равен $\beta - \alpha$. Пусть эта прямая пересечёт дугу S' в точке E; тогда $\angle DCE = \beta - (\beta - \alpha) = \alpha$, т. е. $\angle DCE = \angle BAC$ и, значит, $\smile DE = \smile BC$.

Отсюда вытекает следующее построение, аналогичное решению задачи а). На заданном отрезке AC строим дугу S, вмещающую заданный угол B, и по другую сторону дугу S', вмещающую заданный угол D. Проведём через точку C прямую, образующую с прямой AC угол $\beta - \alpha = \angle B + \angle C - 180^\circ$ и пересекающую дугу S' в точке E. После этого нам остаётся решить задачу, к которой свелась и задача а): на двух окружностях S и S' заданы точки C и E; найти на них такие точки B и D, чтобы дуги CB и ED были равны по угловой мере и чтобы отрезок DB имел данную длину.

в) Пусть $XYZT$ есть искомый параллелограмм; MX, MY, MZ, MT — четыре заданные прямые (черт. 185, *б*). Перенесём

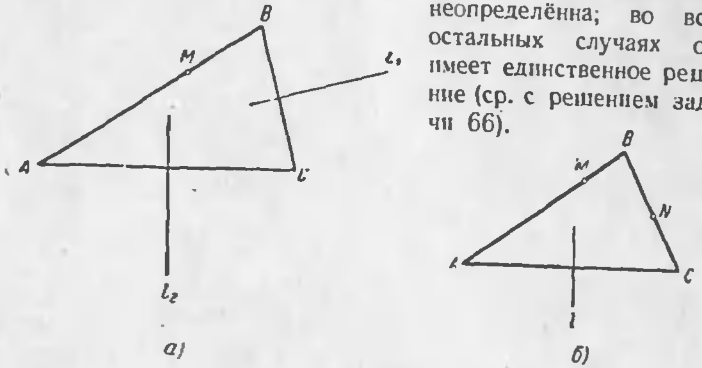


б)

Черт. 185, *б*.

треугольник XMY параллельно YZ на расстояние YZ так, чтобы отрезок XY совпал с отрезком TZ. Если M' есть новое положение точки M, то в четырёхугольнике $MZM'T$ нам будут известны диагонали ZT и $MM'=YZ$ и углы: $\angle ZMT$, $\angle ZM'T=\angle YMX$, $\angle MTM'=\angle XMT$, $\angle MZM'=\angle YMZ$. Поэтому настоящая задача сводится к задаче б).

72. а) Предположим, что треугольник ABC построен (черт. 186, *а*). Произведём последовательно центрально-подобное преобразование с центром M и коэффициентом $-k$ и две симметрии относительно прямых l_1 и l_2; при этом сначала точка A перейдёт в B, затем точка B перейдёт в C и, наконец, C — в A. Таким образом, точка A есть неподвижная точка суммы центрально-подобного преобразования и двух симметрий относительно прямых. Эта сумма переводит, очевидно, каждую фигуру F в фигуру F', собственно-подобную F, и в силу теоремы 1 представляет собой центрально-подобное вращение. Центр O этого центрально-подобного вращения нетрудно отыскать; для этого достаточно построить отрезок $P'Q'$, в который переводит эта сумма трёх преобразований произвольный отрезок PQ плоскости, и затем найти центр вращения этих двух отрезков (см. выше, стр. 105—106). Вершина A должна совпадать с точкой O (ибо единственной неподвижной точкой центрально-подобного вращения является его центр); после этого легко определить и две другие вершины B и C искомого треугольника. Если $k=1$, $l_1 \perp l_2$, то задача невозможна или неопределённа; во всех остальных случаях она имеет единственное решение (ср. с решением задачи 66).



Черт. 186.

б) Пусть треугольник ABC построен (черт. 186, б). Последовательно произведённые центрально-подобные преобразования с центрами M и N и коэффициентами $-k_1$ и $-k_2$ и симметрия относительно прямой l переводят точку A в себя. Таким образом, A есть неподвижная точка суммы двух центрально-подобных преобразований и одной симметрии относительно прямой. Это преобразование, очевидно, переводит всякую фигуру F плоскости в фигуру F', зеркально-подобную F, и в силу теоремы 2 представляет собой центрально-подобную симметрию. Ось и центр O этого преобразования нетрудно найти, если определить отрезок $P'Q'$, в который переводит это преобразование произвольно выбранный отрезок PQ (см. выше, стр. 112—113, в частности черт. 89). Точка A совпадает с точкой O. Построив A, мы без труда найдём и остальные вершины B и C искомого треугольника.

Если $k_1k_2=1$, то наша сумма преобразований представляет собой скользящую симметрию (или просто симметрию относительно прямой); в этом случае задача решения не имеет (или неопределённа). Во всех остальных случаях задача имеет единственное решение.

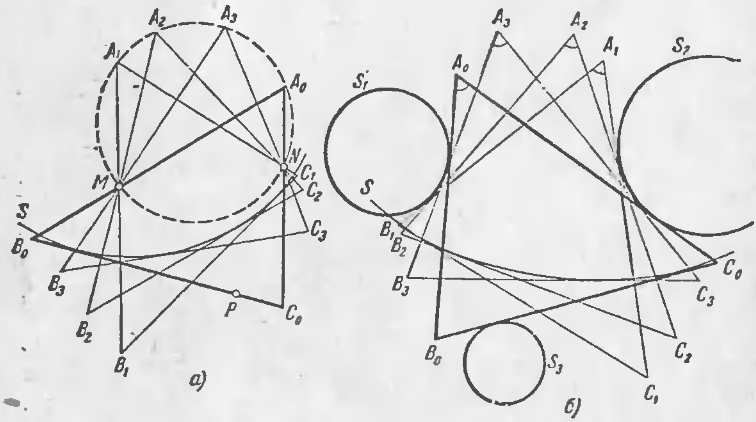
ГЛАВА II

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ

§ 1

73. а) Можно построить много треугольников $A_1B_1C_1$, равных данному треугольнику ABC и таких, что его стороны A_1B_1 и A_1C_1 проходят через две заданные точки M и N. В силу теоремы 1 (стр. 118) стороны B_1C_1 всех этих треугольников касаются некоторой окружности S, которую можно найти, построив три таких треугольника $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ (черт. 187, a). После этого остаётся провести из данной точки P касательную к S: на ней будет располагаться сторона B_0C_0 искомого треугольника $A_0B_0C_0$.

Задача может иметь два, одно или ни одного решения.



Черт. 187.

б) Эта задача очень близка к задаче а). Можно построить много треугольников $A_1B_1C_1$, равных данному треугольнику ABC и таких, что A_1B_1 касается данной окружности S_1, а A_1C_1 — данной окружности S_2. Третьи стороны всех этих треугольников касаются некоторой окружности S (см. стр. 119), которую легко найти, построив три таких треугольника $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ (черт. 187, $б$). После этого остаётся провести общую касательную к окружности S и к данной окружности S_3; на этой прямой будет располагаться сторона B_0C_0 искомого треугольника $A_0B_0C_0$.

Окружности S и S_3 имеют, вообще говоря, четыре общие касательные. Кроме того, треугольник $A_1B_1C_1$ (а следовательно, и $A_2B_2C_2$, и $A_3B_3C_3$) можно строить следующими четырьмя существенно различными способами:

1°. Окружность S_1 и точка C_1 лежат по разные стороны от A_1B_1; окружность S_2 и точка B_1 — по разные стороны от A_1C_1 (черт. 187, *б*).

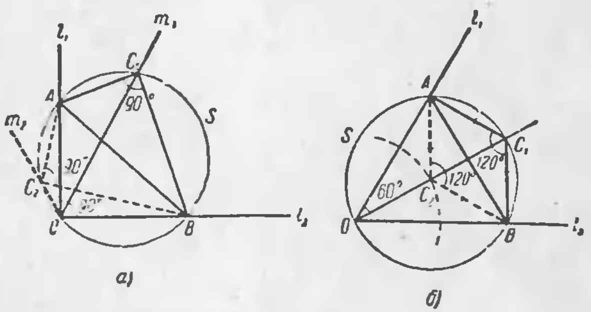
2°. Окружность S_1 и точка C_1 лежат по разные стороны от A_1B_1, окружность S_2 и точка B_1 — по одну сторону от A_1C_1.

3°. Окружность S_1 и точка C_1 лежат по одну сторону от A_1B_1; окружность S_2 и точка B_1 — по разные стороны от A_1C_1.

4°. Окружность S_1 и точка C_1 лежат по одну сторону от A_1B_1; окружность S_2 и точка B_1 — по одну сторону от A_1C_1.

Таким образом, всего задача может иметь до 16 решений.

74. а) Точки C_1 и C_2 на черт. 188, *а* расположены на описанной окружности S треугольника ABO. В силу теоремы 2 (стр. 119—120), когда отрезок AB скользит своими концами

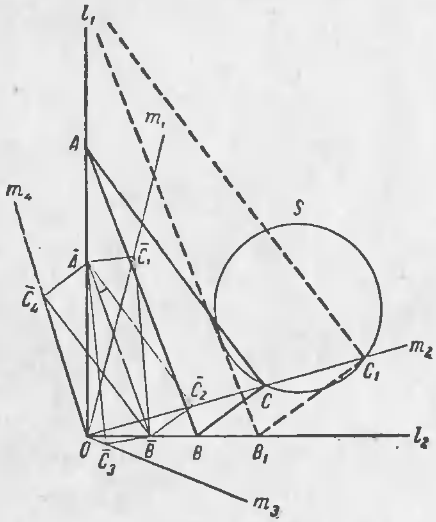


Черт. 188.

по сторонам угла l_1Ol_2, вершины C_1 и C_2 треугольников ABC_1 и ABC_2 описывают прямые m_1 и m_2, проходящие через O (вернее, некоторые отрезки этих прямых, длины которых предоставляем читателю определить самостоятельно).

б) Точка C_1 на черт. 188, *б* расположена на описанной окружности S треугольника ABO; точка C_2 является центром этой окружности. Когда отрезок AB скользит своими концами по сторонам угла l_1Ol_2, вершина C_1 треугольника ABC_1 описывает прямую, проходящую через O, а вершина C_2 треугольника ABC_2—окружность с центром O (см. выше, стр. 120). [Точнее будет сказать, что C_1 описывает отрезок прямой, а C_2 — дугу окружности.]

75. Предположим, что треугольник ABC построен, и рассмотрим треугольник $\overline{ABC}$ с какой-то фиксированной длиной гипотенузы $\overline{AB} = a$, центрально-подобный $\triangle ABC$ с центром подобия в точке O пересечения l_1 и l_2. Вершина $\overline{C}$, как следует из решения задачи 74 а), лежит на одной из прямых m_1, m_2, m_3 и m_4 (см. черт. 189), которые легко построить



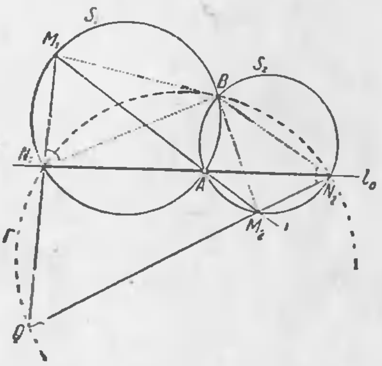
Черт. 189.

(для этого достаточно построить прямоугольные треугольники $\overline{ABC}_1$, $\overline{ABC}_2$, $\overline{ABC}_3$ и $\overline{ABC}_4$ с данным острым углом α, вершины острых углов которых совпадают с произвольно выбранными точками прямых l_1 и l_2); очевидно, на той же прямой лежит и C. Поэтому находим C как пересечение одной из прямых m_1, m_2, m_3 и m_4 с окружностью S.

Задача может иметь до восьми решений.

76. а) Рассмотрим четырёхугольник BM_1M_2P, где B — вторая точка пересечения S_1 и S_2. Когда M_1M_2 вращается вокруг A, треугольник BM_1M_2 остаётся подобным сам себе (см. решение задачи 61); поэтому и четырёхугольник BM_1M_2P остаётся подобным сам себе. Далее все утверждения задачи вытекают из того, что точка B этого четырёхугольника остаётся неподвижной, вершины M_1 и M_2 описывают окружности S_1 и S_2, а сторона M_1M_2 проходит всё время через неподвижную точку A (см. выше, стр. 122 — 123). [Мы считаем, что треугольник M_1M_2P построен по определённую сторону от M_1M_2 — по ту же, по которую расположен треугольник BM_1M_2, или по другую; в противном случае придётся считать, что P может описывать две окружности, и соответственно изменить и формулировку задачи, относящуюся к прямым M_1P и M_2P.]

б) Так как $\triangle BM_1M_2 \sim \triangle BN_1N_2$ (см. решение задачи а)), то $\triangle BM_1N_1 \sim \triangle BM_2N_2$; следовательно, $\angle BN_1M_1 = \angle BN_2M_2$ и, значит, вокруг четырёхугольника BN_1QN_2 можно описать окружность. Но это означает, что геометрическим местом

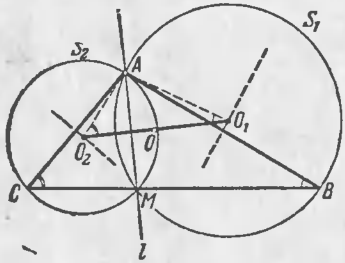


Черт. 190.

точек Q является окружность Γ (черт. 190), описанная вокруг треугольника BN_1N_2.

Когда l_0 поворачивается вокруг точки A, треугольник BN_1N_2 изменяется, оставаясь сам себе подобным (см. решение задачи а)); так как при этом точка B остаётся неподвижной, а точки N_1 и N_2 описывают окружности S_1 и S_2, то и центр описанной окружности Γ этого треугольника описывает окружность.

77. Очевидно, $\angle ABM = \angle AO_1O_2$ (оба они измеряются половиной дуги AM окружности S_1; см. черт. 191); аналогично $\angle ACM = \angle AO_2O_1$. Поэтому когда l поворачивается вокруг A, треугольник AO_1O_2 изменяется, оставаясь подобным самому себе (и треугольнику ABC); так как при этом точка A остаётся неподвижной, а точки O_1 и O_2 описывают прямые — перпендикуляры, восставленные к сторонам AB и AC треугольника ABC в их серединах, — то и середина отрезка O_1O_2 описывает прямую.



Черт. 191.

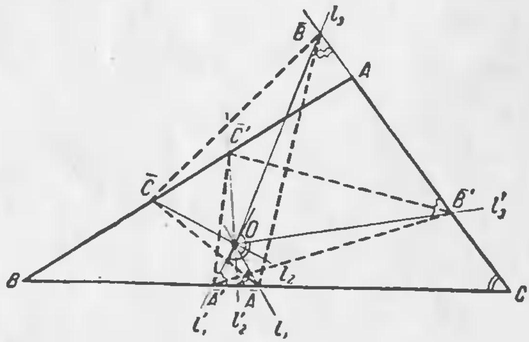
78. Пусть $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ — два каких-то положения треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ (черт. 192). Так как угол между $O\bar{A}$ и $O\bar{B}$ ($O\bar{A}'$ и $O\bar{B}'$) равен углу между $\bar{A}C$ и $\bar{B}C$, то

$$\angle \bar{A}O\bar{B} + \angle \bar{A}C\bar{B} = \angle \bar{A}'O\bar{B}' + \angle \bar{A}'C\bar{B}' = 180^\circ,$$
$$\angle O\bar{A}C + \angle O\bar{B}C = \angle O\bar{A}'C + \angle O\bar{B}'C = 180^\circ$$

и

$$\angle O\bar{A}'\bar{A} = \angle O\bar{B}'\bar{B}, \quad \angle O\bar{A}\bar{A}' = \angle O\bar{B}\bar{B}'.$$

Таким образом, треугольники $O\bar{A}\bar{A}'$ и $O\bar{B}\bar{B}'$ подобны; точно так же можно показать, что и треугольник $O\bar{C}\bar{C}'$ подобен им. Отсюда следует, что треугольник $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ получается из $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ центрально-подобным вращением с центром O. Итак, при вращении прямых l_1, l_2, l_3 вокруг O треугольник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ изменяется, оставаясь подобным самому себе; при этом каждые два положения этого треугольника имеют один и тот же центр вращения O. Отсюда и из того, что вершины треугольника описывают прямые, следует, что каждая точка его описывает прямую — это даёт ответ на вопрос задачи б). Отсюда же вытекает, что точка O одинаково расположена по отношению ко всем треугольникам $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; поэтому для того чтобы выяснить её положение в этих треугольниках, достаточно рассмотреть один из них, например треугольник $\overline{A}_0\overline{B}_0\overline{C}_0$, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из O на стороны ABC. Но



Черт. 192.

1° если O — центр описанной окружности треугольника ABC, то стороны $\triangle \overline{A}_0\overline{B}_0\overline{C}_0$ параллельны сторонам $\triangle ABC$ (как средние линии треугольника) и O — точка пересечения высот $\triangle \overline{A}_0\overline{B}_0\overline{C}_0$;

2° если O — центр вписанной окружности $\triangle ABC$, то $O\overline{A}_0 = O\overline{B}_0 = O\overline{C}_0$ и O—центр описанной окружности $\triangle \overline{A}_0\overline{B}_0\overline{C}_0$;

3° если O — точка пересечения высот $\triangle ABC$, то O — точка пересечения биссектрис треугольника $\overline{A}_0\overline{B}_0\overline{C}_0$ ($\angle O\overline{A}_0\overline{B}_0 = \angle OC\overline{B}_0$ как углы, опирающиеся на одну дугу описанной около $O\overline{A}_0C\overline{B}_0$ окружности; $\angle O\overline{A}_0\overline{C}_0 = \angle OB\overline{C}_0$ по аналогичной причине; $\angle OC\overline{B}_0 = \angle OB\overline{C}_0$ в силу подобия треугольников $AC\overline{C}_0$ и $AB\overline{B}_0$).

79. а) Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре данные прямые. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$, подобные данному, три вершины $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ которых лежат на прямых l_1, l_2 и l_3; задав вершину $\overline{A}$ или направление стороны $\overline{A}\overline{B}$ такого четырёхугольника, мы сможем его построить (см. задачи 60 а) из § 2 и 47 б) из § 1). Из теоремы 3 (стр. 125) следует, что вершины $\overline{D}$ всех таких четырёхугольников лежат на определённой прямой l, которую нетрудно построить, найдя два положения $\overline{D}$. Точка пересечения l и l_4 является вершиной D искомого четырёхугольника $ABCD$; далее придётся снова воспользоваться построением, указанным в решении задачи 60 а).

Вообще говоря, задача имеет единственное решение; исключение составляют случаи, когда $l \parallel l_4$ (задача не имеет решения) и когда l совпадает с l_4 (решение задачи неопределённо).

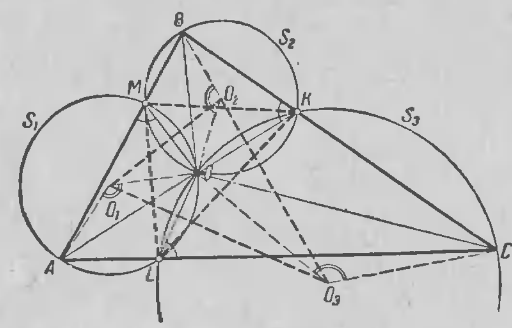
б) Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — четыре данные точки. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$, подобные данному, стороны $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{B}\overline{C}$ и $\overline{C}\overline{D}$ которых проходят через точки M_1, M_2 и M_3; так как вершины $\overline{B}$ и $\overline{C}$ этих четырёхугольников лежат на дугах, описанных на M_1M_2 и на M_2M_3 и вмещающих известные углы, то можно построить сколько угодно таких четырёхугольников. В силу теоремы 4 (стр. 125) стороны $\overline{D}\overline{A}$ всех таких четырёхугольников будут проходить через определённую точку M, которую легко найти, построив два положения четырёхугольника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$. Прямая MM_4 будет служить стороной DA искомого четырёхугольника. Если M совпадает с M_4, то решение задачи будет неопределённым.

в) Вершины $\overline{A}$ всех четырёхугольников $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$, подобных данному и таких, что $\overline{B}\overline{C}$, $\overline{C}\overline{D}$ и $\overline{B}\overline{D}$ проходят через данные точки M, N и P, в силу теоремы 4 лежат на определённой окружности $\overline{S}$ (её нетрудно построить; для этого достаточно найти три положения точки $\overline{A}$). Точка пересечения $\overline{S}$ и данной окружности S есть вершина A искомого четырёхугольника (ср. с решением задачи б)). Задача может иметь два, одно или ни одного решения; если окружности $\overline{S}$ и S совпадают, то решение задачи неопределённо.

80. Рассмотрим всевозможные прямые $\overline{l}$, такие, что отношение отрезков $\overline{A}\overline{B}$ и $\overline{B}\overline{C}$, высекаемых на $\overline{l}$ прямыми l_1, l_2 и l_3, имеет данную величину; взяв произвольно точку $\overline{A}$ на прямой l_1, мы можем построить $\overline{l}$ (см. задачу 44 из § 1). Точки $\overline{D}$ на прямых $\overline{l}$ такие, что отрезки $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{B}\overline{C}$ и $\overline{C}\overline{D}$ имеют заданные отношения, лежат на прямой m (см. теорему 3), которую нетрудно построить, найдя два положения точки $\overline{D}$. Точка пересечения прямых m и l_4 принадлежит искомой прямой l; далее придётся снова использовать построение, указанное в решении задачи 44. Если $m \parallel l_4$, то задача не имеет решений; если m совпадает с l_4, то её решение неопределёино (ср. с решением задачи 79 а)).

81. При изменении угла α треугольник $A'B'C'$ изменяется, оставаясь подобным самому себе (и треугольнику ABC), причём его стороны всё время проходят через неподвижные точки — середины сторон ABC; поэтому все его точки (и, в частности, точки пересечения высот, биссектрис и медиан) описывают окружности. Второе утверждение задачи вытекает из того, что центр вращения O всех положений треугольника $A'B'C'$ (в том числе и треугольника ABC, отвечающего значению $\alpha = 0$) совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC; для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что при $\alpha = 90°$ рассматриваемые прямые пройдут через одну точку O.

82. а) Если треугольник KLM изменяется, оставаясь подобным самому себе, так, что его вершины K, L и M скользят по сторонам BC, CA и AB треугольника ABC, то все положения треугольника KLM имеют общий центр вращения O,

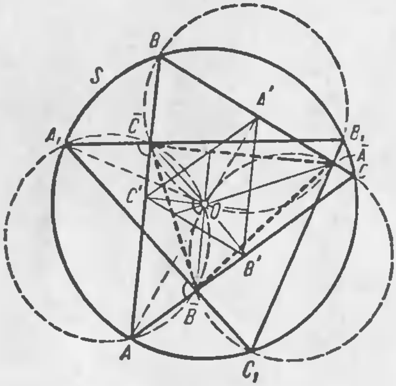


Черт. 193.

который будет лежать и на окружности S_1, и на окружности S_2, и на окружности S_3 (см. доказательство теоремы 3, в частности черт. 96, *а* на стр. 125). Следовательно, эти три окружности проходят через одну точку O (черт. 193).

б) Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей S_1, S_2 и S_3, O — их общая точка (черт. 193). Так как четырёхугольник $ALOM$ вписан в окружность, то $\angle AMO + \angle ALO = 180°$ и, следовательно, $\angle AMO = \angle CLO$; аналогично $\angle CLO = \angle BKO$. Но из равенства $\angle AMO = \angle BKO = \angle CLO$ следует: $\angle AO_1O = \angle BO_2O = \angle CO_3O$; значит, треугольники OO_1A, OO_2B и OO_3C все подобны между собой, и треугольник $O_1O_2O_3$ может быть получен из треугольника ABC центрально-подобным вращением $\left(\text{с центром } O\text{, углом поворота } O_1OA \text{ и коэффициентом подобия } \frac{OO_1}{OA}\right)$.

83. а) Треугольник $A_1B_1C_1$ получается из треугольника ABC поворотом вокруг точки O на некоторый угол α. Отсюда следует, что $\angle A\bar{B}A_1 = \angle A\bar{C}A_1 = \angle AOA_1 = \alpha$, т. е. точки A, A_1, $\bar{B}$, $\bar{C}$ и O лежат на одной окружности (черт. 194). Точно так же доказывается, что пятёрки точек B, B_1, $\bar{A}$, $\bar{C}$, O и C, C_1, $\bar{A}$, $\bar{B}$, O лежат каждая на одной окружности.



Черт. 194.

Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, образованный средними линиями треугольника ABC. Будем изменять этот треугольник, оставляя его всё время подобным самому себе (т. е. подобным $\triangle ABC$), так чтобы вершины его скользили по сторонам треугольника ABC. Все положения треугольника имеют один центр вращения — точку пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ (см. решение задачи 82 а)), т. е. точку O. Предположим теперь, что одна вершина изменяющегося треугольника совпала с точкой $\bar{A}$; пусть $\bar{B}'$ и $\bar{C}'$ — две другие его вершины. В таком случае вершина $\bar{B}'$ лежит на одной окружности с точками C, $\bar{A}$ и O (см. доказательство теоремы 3); отсюда следует, что она совпадает с точкой $\overline{B}$. Точно так же доказывается, что вершина $\overline{C}'$ совпадает с точкой $\overline{C}$.

б) Точка O является неподвижной точкой изменяющегося треугольника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; она должна соответствовать самой себе во всех положениях этого треугольника. Так как O есть точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$, то отсюда следует, что O есть точка пересечения высот и для треугольника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

84. а) l_2 получается из l_1 в результате суммы двух симметрий относительно двух сторон треугольника ABC; следовательно, угол между l_1 и l_2 равен двойному углу между этими сторонами треугольника (см. выше, стр. 50 и 33). Таким образом, углы треугольника T определяются углами треугольника ABC и не зависят от положения l. [Если бы треугольник ABC был прямоугольным, то две из трёх прямых l_1, l_2, l_3 были бы параллельны и l_1, l_2, l_3 не образовывали бы треугольника.]

б) Предположим, что прямая l поворачивается вокруг какой-то точки M плоскости. При этом стороны треугольника T всё время проходят через точки M_1, M_2, M_3, симметричные M относительно сторон ABC; другими словами, треугольник T изменяется, оставаясь всё время подобным себе, так, что стороны его проходят через неподвижные точки. В доказательстве теоремы 4 (стр. 126 — 128) было показано, что при этом каждые два положения треугольника T имеют один и тот же центр вращения O. Поэтому в том и только том случае, когда l_1 проходит через O (т. е. когда l проходит через точку O', симметричную O относительно стороны AB), треугольник T вырождается в точку (в этом случае прямые l_2 и l_3 тоже проходят через O).

Таким образом, мы видим, что, вообще говоря, среди прямых, проходящих через определённую точку M, будет **лишь одна** прямая l такая, что l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке; если таких прямых окажется две, то это будет означать, что **все** проходящие через M прямые обладают этим свойством. Пусть теперь M и N — две точки, l и $\overline{l}$ — проходящие через них прямые, такие, что им отвечают тройки прямых l_1, l_2, l_3 и $\overline{l}_1$, $\overline{l}_2$, $\overline{l}_3$, пересекающихся в одной точке. Если H — точка пересечения прямых l и $\overline{l}$, то **всем прямым**, проходящим через H, соответствуют прямые l_1, l_2, l_3, пересекающиеся в одной точке. [Прямые l и $\bar{l}$ не могут быть параллельны, ибо если l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке O и $\bar{l} \parallel l$, то прямые $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$ и $\bar{l}_3$ параллельны соответственно l_1, l_2 и l_3 и удалены от O на расстояние, равное расстоянию между $\bar{l}$ и l; поэтому они не могут пересекаться в одной точке.] Если l проходит через H, то l_1 и l_2 проходят через точки H_1 и H_2, симметричные H относительно сторон треугольника ABC; так как, кроме того, угол между l_1 и l_2 имеет определённую величину (см. решение задачи а)), то точка P пересечения l_1 и l_2 описывает окружность S (построенную на отрезке H_1H_2 и вмещающую известный угол [1])).

Итак, мы доказали существование такой точки H, что всем проходящим через H прямым отвечают прямые l_1, l_2 и l_3, пересекающиеся в одной точке. Две такие точки G и H существовать не могут, так как иначе через каждую точку M проходили бы две прямые MG и MH, которым отвечают тройки пересекающихся в одной точке прямых l_1, l_2, l_3. Для того чтобы убедиться, что H совпадает с точкой пересечения высот $\triangle ABC$, а S — с описанной окружностью этого треугольника, достаточно заметить, что прямые l_1, l_2, l_3, отвечающие высотам $\triangle ABC$, пересекаются в его вершинах.

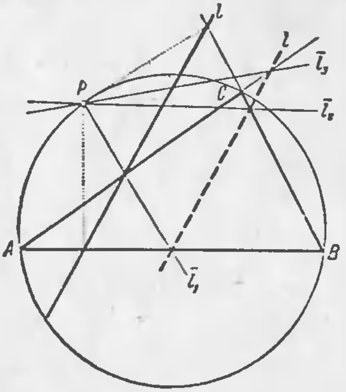
в) Пусть l — произвольная прямая, $\bar{l}$ — параллельная ей прямая, проходящая через H. Прямые $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$, $\bar{l}_3$ пересекаются в одной точке P; прямые l_1, l_2 и l_3, как отмечалось в решении задачи б), будут удалены от P на расстояние, равное расстоянию от $\bar{l}$ до l, или, что то же самое, расстоянию от H до l. Таким образом, радиус вписанной окружности треугольника T равен расстоянию от H до l; так как все треугольники T подобны между собой, то отсюда следует, что площадь T зависит лишь от расстояния H до l.

85. Первое решение. Если основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны ABC, лежат на одной прямой l, то прямые $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$ и $\bar{l}_3$, симметричные относительно сторон $\triangle ABC$ прямой $\bar{l}$, центрально-подобной l с центром подобия P и коэффициентом подобия 2, пересекаются в одной

---

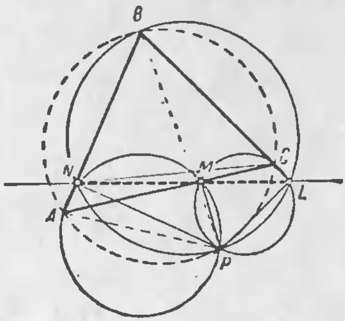
[1]) См. сноску [2]) на стр. 50.

точке P (черт. 195). Отсюда вытекает, что точка P должна лежать на описанной окружности $\triangle ABC$ (а прямая $\bar{l}$ — проходить через точку H пересечения высот $\triangle ABC$; см. задачу 84 б)).



Черт. 195.

Второе решение. Обозначим основания перпендику-



Черт. 196.

ляров, опущенных из точки P на стороны AB, BC, CA треугольника ABC, соответственно буквами N, L и M (черт. 196). Докажем, что точка P является центром вращения всех треугольников $L'M'N'$, подобных треугольнику LMN, вершины которых лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. В самом деле, из того, что $\angle PMA = \angle PNA = 90°$, следует, что точки A, M, N и P лежат на одной окружности, т. е. точка P лежит на окружности AMN. Точно так же докажем, что точка P лежит на окружностях BNL и CLM. Но точка пересечения этих окружностей и является центром рассматриваемого вращения (см. решение задачи 82 а)).

Далее, например, в случае, изображённом на черт. 196[1]),

$$\angle APB = \angle APN + \angle NPB = \angle AMN + \angle NLB,$$

так как и углы APN и AMN, и углы NPB и NLB вписаны в одну и ту же окружность и опираются на одну и ту же дугу. Но

$$\angle AMN = \angle MCN + \angle MNC, \quad \angle NLB = \angle NCB - \angle LNC,$$

---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 50.

так что

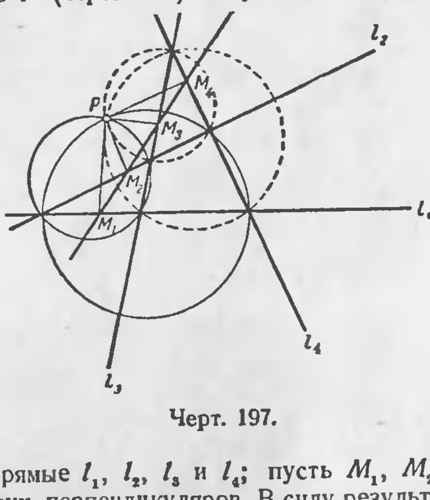
$$\angle AMN + \angle NLB = \\ = (\angle MCN + \angle NCB) + (\angle MNC - \angle LNC) = \\ = \angle MCB + \angle MNL.$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, заключаем, что

$$\angle APB = \angle MCB + \angle MNL.$$

Полученное равенство позволяет доказать утверждение, содержащееся в задаче. Действительно, если точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, то $\angle APB = \angle ACB$ и $\angle MNL = 0$, т. е. точки M, N, L лежат на одной прямой (черт. 196). Обратно, если точки M, N и L лежат на одной прямой, то $\angle MNL = 0$ и $\angle APB = \angle ACB$; следовательно, точка P лежит на окружности, проходящей через точки A, B и C.

86. а) Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре данные прямые. Опишем окружности вокруг двух треугольников, образованных прямыми l_1, l_2, l_3 и l_1, l_2, l_4; точку пересечения этих окружностей (отличную от точки пересечения прямых l_1 и l_2) обозначим через P (черт. 197). Опустим из точки P перпенди-



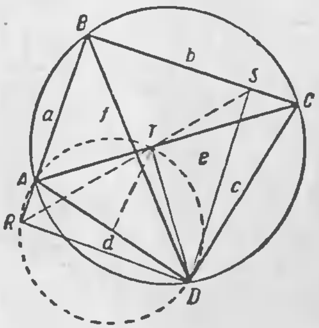
Черт. 197.

куляры на прямые l_1, l_2, l_3 и l_4; пусть M_1, M_2, M_3 и M_4 — основания этих перпендикуляров. В силу результата задачи 85 точки M_1, M_2 и M_3 лежат на одной прямой и точки M_1, M_2

и M_4 лежат на одной прямой; следовательно, все эти четыре точки лежат на одной прямой. Но из той же задачи вытекает, что точки M_1, M_3 и M_4 могут лежать на одной прямой только в том случае, когда точка P лежит на окружности, описанной около треугольника, сторонами которого являются прямые l_1, l_3 и l_4. Аналогично показывается, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника, сторонами которого являются прямые l_2, l_3 и l_4.

б) В обозначениях черт. 100 $MP \perp AB$ (ибо углы MPA и MPB опираются на диаметр); аналогично $MQ \perp AC$ и $MR \perp BC$. Следовательно, P, Q и R суть основания перпендикуляров, опущенных из точки M описанной вокруг треугольника ABC окружности S на стороны этого треугольника.

в) Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, вписанный в окружность, и $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=e$, $BD=f$ (черт. 198). Опустим из точки D перпендикуляры DR, DS и DT на стороны AB, BC и CA треугольника ABC; согласно результату предыдущей задачи основания R, S и T этих перпендикуляров будут лежать на одной прямой. Вокруг четырёхугольника $ATDR$ можно, очевидно, описать окружность; диаметром этой окружности будет являться отрезок AD. Отсюда следует, что $TR = AD \sin \angle TDR = d \sin \angle TDR$. Но $\angle TDR = \angle BAC$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами), а из рассмотрения треугольника ABC следует, что $\sin \angle BAC = \frac{BC}{2R} = \frac{b}{2R}$, где R — радиус окружности, описанной вокруг четырёхугольника $ABCD$. Таким образом, окончательно получаем:



Черт. 198.

$$TR = d\frac{b}{2R} = \frac{bd}{2R}.$$

Совершенно аналогично выводятся соотношения

$$TS = \frac{ac}{2R}, \quad RS = \frac{ef}{2R}.$$

Далее, так как точки R, S и T лежат на одной прямой (см. черт. 198), то

$$RT+TS=RS$$

или

$$\frac{bd}{2R}+\frac{ac}{2R}=\frac{ef}{2R}.$$

Сокращая обе части равенства на $2R$, имеем:

$$bd+ac=ef,$$

что и требовалось доказать.

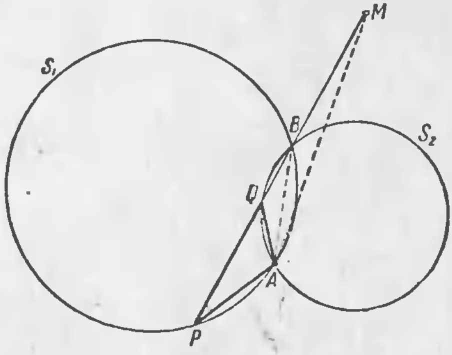
87. Окружности, описанные вокруг четырёх треугольников, образованных нашими четырьмя прямыми, пересекаются в одной точке P (задачи 64, 86 а)); основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые l_1, l_2, l_3 и l_4, лежат на одной прямой m (задача 85). Точки H_1, H_2, H_3 и H_4 пересечения высот рассматриваемых четырёх треугольников центрально-подобны точкам пересечения прямых PH_1, PH_2, PH_3 и PH_4 с прямой m с центром подобия P и коэффициентом подобия 2 (см. первое решение задачи 85); следовательно, они лежат на одной прямой, параллельной прямой m и проходящей через точку P', симметричную точке P относительно прямой m.

88. Обозначим точки пересечения окружностей S_1 и S_2 буквами A и B; обозначим, далее, буквами P и Q точки пересечения прямой MB соответственно с окружностями S_1 и S_2 (черт. 199). Так как нам задано отношение $\frac{m}{n}$ длин отрезков касательных, проведённых из точки M к заданным окружностям, то можно считать известным также и отношение

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{MP\cdot MB}{MQ\cdot MB}=\frac{m^2}{n^2}.$$

Из полученного равенства следует, что если $m=n$, то точки P и Q должны совпадать, точка M должна принадлежать прямой AB; поэтому в дальнейшем мы будем считать $m\neq n$.

Рассмотрим теперь треугольник AQP. При перемещении точки M он изменяется; при этом угол APQ остаётся постоянным, так как он опирается на постоянную дугу окружности S_1, угол $AQP = 180° - \angle AQB$ также остаётся постоянным, так как $\angle AQB$ опирается на постоянную дугу окружности S_2. Следовательно, треугольник остаётся подобным самому себе. Вершина A треугольника остаётся при этом



Черт. 199.

неподвижной, точка P описывает окружность S_1; следовательно, и точка M $\left(\text{расположенная на стороне } QP \text{ треугольника и такая, что } \frac{MP}{MQ} = \frac{m^2}{n^2}\right)$ описывает окружность S, которая получается из окружности S_1 при помощи центрально-подобного вращения с центром A, углом поворота PAM и коэффициентом подобия $\frac{AM}{AP}$.

Очевидно, что окружность S проходит через точку A; докажем, что она проходит и через точку B. Для этого достаточно отметить на окружности S_1 точку C такую, что $\angle CAB = \angle PAM$; так как $\angle ACB = \angle APM$, то треугольники ACB и APM будут подобны $\left(\frac{AC}{AB} = \frac{AP}{AM}\right)$ и, значит, рассматриваемое выше центрально-подобное вращение переводит точку C в точку B.

Искомое геометрическое место может быть построено следующим образом. Через одну из точек A и B пересечения окружностей S_1 и S_2 проведём произвольную прямую, пересекающую окружности S_1 и S_2 в точках P и Q. Построим на этой прямой точку M такую, что $\frac{MP}{MQ}=\frac{m^2}{n^2}$, где $\frac{m}{n}$ — данное отношение длин отрезков касательных. Окружность, проходящая через точки A, B и M (точнее, дуга этой окружности, расположенная вне окружностей S_1 и S_2), и будет искомым геометрическим местом.

89. Все такие треугольники $A'B'C'$ имеют с треугольником ABC общий центр вращения O, совпадающий с точкой пересечения окружностей $AB'C'$ и $BA'C'$ (см. доказательство теоремы 3). Далее остаётся только рассмотреть частное положение треугольника $A'B'C'$, когда A', B' и C' суть середины сторон треугольника ABC.

90. а) Так как O_1 есть центр вращения треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, то (см. черт. 200)

$$\left.\begin{aligned} \angle AO_1A_1 = \angle BO_1B_1 = \angle CO_1C_1, \\ \frac{O_1A}{O_1A_1}=\frac{O_1B}{O_1B_1}=\frac{O_1C}{O_1C_1} \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

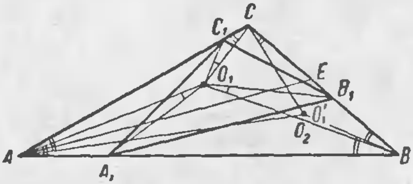
и, следовательно, треугольники AO_1A_1, BO_1B_1, CO_1C_1 подобны между собой. Отсюда мы получаем, что

$$\angle O_1AB = \angle O_1BC = \angle O_1CA. \qquad (**)$$

Точно так же доказывается, что

$$\angle O_2BA = \angle O_2CB = \angle O_2AC. \qquad (***)$$

Обратно, если точка O_1 такова, что для неё выполнено условие (**), то она является первым центром вращения тре-



Черт. 200.

угольника ABC. В самом деле, проведём три прямые OA_1, O_1B_1, O_1C_1, пересекающие стороны треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 и образующие равные углы с этими сторонами. Треугольники AO_1A_1, BO_1B_1 и CO_1C_1 будут подобны (по равенству углов); поэтому выполняются соотношения (*) и точка O_1 является центром вращения треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. O_1 есть первый центр вращения треугольника ABC. Точно так же доказывается, что точка O_2 является вторым центром вращения треугольника ABC, если для неё выполнено соотношение (***).

Докажем теперь, что $\angle O_1AB = \angle O_2AC$. Для этого построим прямые, симметричные прямым AO_1, BO_1 и CO_1 относительно биссектрис соответствующих углов, и покажем, что эти три прямые пересекутся в одной точке O_1'. Обозначим расстояние от точки O_1 до сторон AB, BC и CA треугольника через m, n и p. Прямая AO_1 есть геометрическое место точек, расстояния которых от сторон AB и AC треугольника относятся как $m:p$; следовательно, прямая, симметричная AO_1 относительно биссектрисы угла A треугольника, есть геометрическое место точек, расстояния которых от сторон AB и AC треугольника относятся как $p:m$ (черт. 200). Точно так же прямые, симметричные прямым BO_1 и CO_1 относительно биссектрис углов B и C, суть геометрические места точек, расстояния от которых до BA и AC относятся как $m:n$, соответственно расстояния до CA и CB относятся как $p:n$. Отсюда следует, что расстояния точки O_1' пересечения последних двух прямых до сторон AB и AC относятся между собой как $m:p$, т. е. что точка O_1' принадлежит и первой из рассматриваемых трёх прямых.

Из соотношений (**), выполняющихся для точки O_1, следует, что для точки O_1' выполняются соотношения

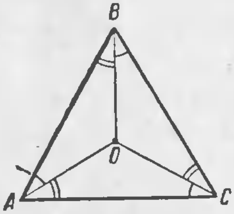
$$\angle O_1'BA = \angle O_1'CB = O_1'AC$$

$$(\text{так как } \angle O_1AB = \angle O_1'AC,\ \angle O_1BC = \angle O_1'BA,\ \angle O_1CA = \angle O_1'CB).$$

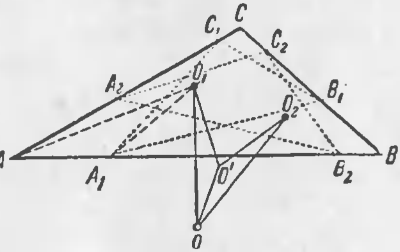
Поэтому точка O_1' является вторым центром вращения O_2 треугольника ABC и, значит, действительно $\angle O_1AB = \angle O_2AC$.

б) Пусть точка O является одновременно первым и вторым центром вращения треугольника ABC (черт. 201).

Так как O есть первый центр вращения, то $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA$; так как O есть второй центр вращения, то $\angle OBA = \angle OCB = \angle OAC$. Но отсюда сразу следует, что $\angle A = \angle B = \angle C$, т. е. что треугольник ABC — равносторонний.



Черт. 201.



Черт. 202.

в) Здесь удобнее всего воспользоваться результатами нижеследующей задачи 92. В силу этих результатов центры O_1' и O_2' окружностей, описанных вокруг равных треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, совпадают (на черт. 202 эти центры совпадают с одной точкой O'). Так как треугольник $A_1B_1C_1$ получается из ABC центрально-подобным вращением с центром O_1, углом поворота α и каким-то коэффициентом k, то $\angle O'O_1O = \alpha$, $\frac{O_1O'}{O_1O} = k$; так как $A_2B_2C_2$ получается из ABC центрально-подобным вращением с центром O_2, *тем же самым* углом поворота α (ибо A_1B_1 и A_2B_2 образуют одинаковые углы с AB) и *тем же самым* коэффициентом подобия k (ибо треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны), то $\angle O'O_2O = \alpha$, $\frac{O_2O'}{O_2O} = k$. Отсюда вытекает, что треугольники O_1OO' и O_2OO' подобны, а так как эти треугольники имеют общую сторону OO', то они равны; поэтому $OO_1 = OO_2$.

Отметим, что из подобия треугольников O_1OO' и O_1AA_1 вытекает, что $\angle O_1OO' = \angle O_1AA_1$, и следовательно, $\angle O_1OO_2 = 2\varphi$, где φ есть общее значение углов O_1AB, O_1BC, O_1CA, O_2AC, O_2CB, O_2BA. Отсюда и из результата задачи г) вытекает, что $O_1O_2 \leqslant O_1O = O_2O$ (причём знак равенства достигается лишь для равностороннего треугольника, где все три точки O_1, O_2 и O совпадают).

г) Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться построением, рассматриваемым в задаче 94 (см. ниже черт. 209). Определим произведение $AO_1 \cdot O_1A' = BO_1 \cdot O_1B' = CO_1 \cdot O_1C'$ через радиус R описанного круга треугольника и угол φ. Из подобия треугольников AO_1C' и $A'BO_1$ (см. задачу 94 б)) легко получаем:

$$\frac{AO_1}{AC'} = \frac{A'B}{A'O_1}$$

и, значит,

$$AO_1 \cdot O_1A' = AC' \cdot A'B.$$

Но так как $\smile AC' = \smile A'B = 2\varphi$, то $AC' = A'B = 2R\sin\varphi$. Таким образом $AO_1 \cdot O_1A' = 4R^2\sin^2\varphi$.

Но, с другой стороны (см. черт. 209),

$$AO_1 \cdot O_1A' = MO_1 \cdot O_1N = (R - OO_1)(R + OO_1) = R^2 - OO_1^2 \leqslant R^2.$$

Отсюда следует, что

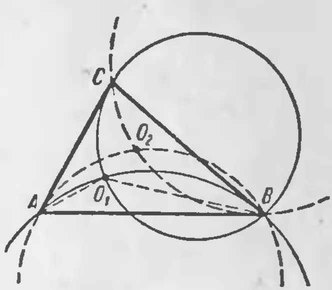
$$4R^2\sin^2\varphi \leqslant R^2;\ \sin^2\varphi \leqslant \frac{1}{4},\ \ \varphi \leqslant 30^\circ,$$

причём $\varphi = 30^\circ$ только в том случае, когда O_1 совпадает с O ($OO_1 = 0$) и треугольник ABC — равносторонний (см. задачи в), б)).

91. Для того чтобы точка O_1 была первым центром вращения треугольника ABC, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\angle O_1AB = \angle O_1BC = \angle O_1CA.$$

Предположим, что первый центр вращения O_1 найден, и построим на отрезке AB дугу окружности, проходящую через точку O_1 (черт. 203). Так как $\angle O_1AB = \angle O_1BC$, то $\angle O_1BC$ измеряется половиной $\smile BO_1$ окружности; следовательно, прямая BC является касательной к окружности BO_1A. Точно



Черт. 203.

так же показывается, что окружности, проходящие через точки B, C и O_1 и через точки C, A и O_1, касаются сторон CA, соответственно AB, треугольника. Поэтому первый центр вращения O_1 треугольника ABC можно построить как точку пересечения двух окружностей: проходящей через A и B и касающейся стороны BC и проходящей через B и C и касающейся CA. Аналогично строится и второй центр вращения треугольника.

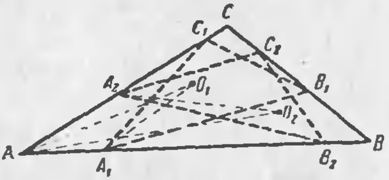
92. а) Треугольник $A_1B_1C_1$ может быть получен из треугольника ABC при помощи вращения вокруг точки O_1 на угол AO_1A_1 и последующего центрально-подобного преобразования с коэффициентом $\frac{O_1A_1}{O_1A}$; поэтому угол между прямыми AB и A_1B_1 равен углу AO_1A_1 (черт. 204). Аналогично доказывается, что угол между прямыми AB и A_2B_2 равен углу AO_2A_2. Поэтому из условия задачи получим, что

$$\angle AO_1A_1 = \angle AO_2A_2.$$

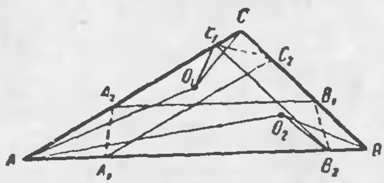
Но из задачи 90 а) следует, что $\angle O_1AA_1 = \angle O_2AA_2$. Таким образом, треугольники AO_1A_1 и AO_2A_2 подобны и, значит,

$$\frac{O_1A_1}{O_1A} = \frac{O_2A_2}{O_2A},$$

т. е. коэффициент подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равен коэффициенту подобия треугольников ABC и $A_2B_2C_2$. Отсюда следует, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.



Черт. 204.



Черт. 205.

б) Докажем, что $B_2C_1 \parallel BC$ (черт. 205). Из решений задач 90 а), 92 а) следует, что треугольники CO_1C_1 и BO_2B_2 подобны, откуда

$$\frac{CC_1}{BB_2} = \frac{CO_1}{BO_2}.$$

Далее, из задачи 90 а) следует, что $\angle O_1CA = \angle O_2BA$ и $\angle O_1AC = \angle O_2AB$; поэтому треугольники CO_1A и BO_2A подобны и

$$\frac{CO_1}{BO_2} = \frac{AC}{AB}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{CC_1}{BB_2}=\frac{AC}{AB},$$

что и доказывает наше утверждение.

Совершенно аналогично доказывается параллельность прямых C_2A_1 и CA, A_2B_1 и AB.

Докажем далее, что прямая A_1A_2 антипараллельна стороне BC треугольника ABC. Из подобия треугольников AO_1A_1 и AO_2A_2 следует:

$$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{O_1A}{O_2A}.$$

Из подобия треугольников CO_1A и BO_2A следует:

$$\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{AC}{AB}.$$

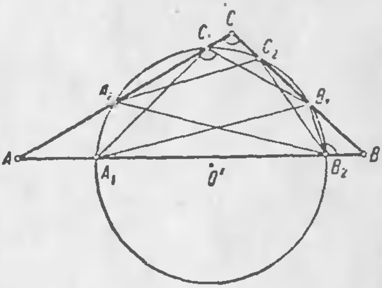
Сравнивая две полученные пропорции, найдём, что

$$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{AC}{AB},$$

откуда вытекает, что треугольники AA_1A_2 и ACB подобны, а следовательно, что прямые A_1A_2 и BC антипараллельны. Точно так же доказывается, что B_1B_2 антипараллельна CA и C_1C_2 антипараллельна AB.

в) Рассмотрим четырёхугольник $B_1C_1A_1B_2$. В этом четырёхугольнике $\angle B_1C_1A_1=\angle C$, так как треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны; кроме того, $\angle A_1B_2B_1=180^\circ-\angle B_1B_2B$ (черт. 206). Но так как прямая B_1B_2 антипараллельна стороне CA треугольника ABC, то $\angle B_1B_2B=\angle C$ и, следовательно,

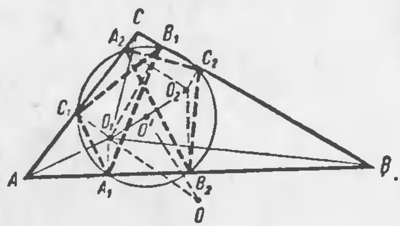
$$\angle B_1C_1A_1+\angle A_1B_2B_1=180^\circ.$$



Черт. 206.

Отсюда мы получаем, что точка B_2 лежит на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Точно так же докажем, что на этой окружности лежат точки C_2 и A_2.

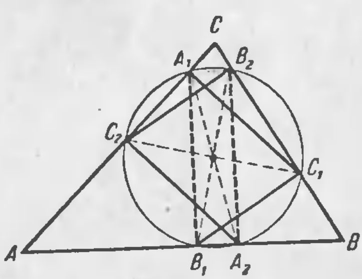
93. а) Так как в прямоугольных треугольниках AA_1O_1, BB_1O_1 и CC_1O_1 углы O_1AA_1, O_1BB_1 и O_1CC_1 равны (см. задачу 90 а)), то эти треугольники подобны (черт. 207). Следовательно, $\angle AO_1A_1 = \angle BO_1B_1 = \angle CO_1C_1$ и $\frac{O_1A}{O_1A_1} = \frac{O_1B}{O_1B_1} = \frac{O_1C}{O_1C_1}$; значит, треугольник $A_1B_1C_1$ может быть получен из треугольника ABC при помощи центрально-подобного вращения с центром O_1. Таким образом, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. Точно так же доказывается, что $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC$.



Черт. 207.

Прямоугольные треугольники AA_1O_1 и AA_2O_2 подобны (см. задачу 90 а)); следовательно, углы AO_1A_1 и AO_2A_2, на которые повёрнуты соответственно треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ по отношению к треугольнику ABC, равны. Поэтому равны углы, образованные прямыми A_1B_1 и A_2B_2 со стороной AB треугольника ABC. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, вписанные в треугольник ABC, удовлетворяют условиям задачи 92; следовательно, к ним можно применить все результаты этой задачи.

Из подобия треугольников O_1OO' и O_1AA_1, где O_1OO' есть треугольник, рассмотренный в решении задачи 90 в) (см. черт. 207), следует, что в нашем случае $\angle O_1O'O = \angle O_1A_1A = 90°$, откуда и вытекает, что точка O' — центр общей описанной окружности треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — лежит в середине отрезка O_1O_2.



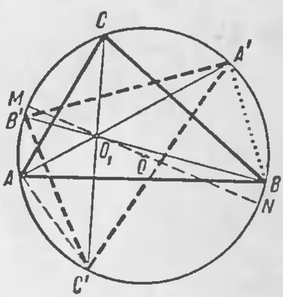
Черт. 208.

б) Если вершины треугольника $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны высотам треугольника ABC, расположены на сторонах ABC в таком порядке, как это изображено на черт. 208, то сторона A_1B_1 может быть параллельна высоте CF

или высоте BE (но не высоте AD!). Если $A_1B_1 \parallel CF$, то $A_1C_1 \parallel BE$; если $A_1B_1 \parallel BE$, то $B_1C_1 \parallel CF$. Таким образом, существуют две возможности вписать в данный треугольник ABC треугольник, стороны которого параллельны высотам ABC, т. е. существуют два таких вписанных треугольника (см. задачу 47 б)). На черт. 208 эти треугольники обозначены через $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Эти треугольники подобны треугольнику ABC, так как их углы равны углам треугольника ABC (одинаковыми буквами у нас обозначены соответствующие вершины). Легко видеть, что для треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ выполнены все условия задачи 92. Отсюда следует равенство этих треугольников (см. задачу 92 а)).

Рассмотрим теперь четырёхугольник $A_1B_1A_2B_2$. В нём $A_1B_1 = A_2B_2$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_1B_1 \perp B_1A_2$. Следовательно, этот четырёхугольник — прямоугольник и его диагонали A_1A_2 и B_1B_2 равны и делятся в точке пересечения пополам. Точно так же докажем, что отрезки B_1B_2 и C_1C_2 равны и делятся в точке пересечения пополам. Следовательно, все три отрезка, соединяющих соответствующие вершины треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, равны и делятся в точке пересечения пополам. Эта точка является центром окружности, описанной одновременно вокруг треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (см. задачу 92 в)).

94. а) Обозначим величину угла $\angle A'AB$ через φ. Так как $\angle A'AB = \angle B'BC = \angle C'CA = \varphi$, то $\smile BA' = \smile CB' = \smile AC' = 2\varphi$ и треугольник $C'A'B'$ получается из треугольника ABC поворотом на угол 2φ вокруг центра O описанной окружности (черт. 209).



Черт. 209.

б) Например, для треугольника AO_1C' мы имеем:

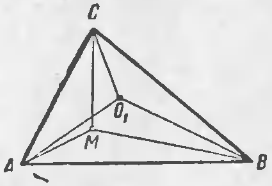
$$\angle AO_1C' = \frac{\smile AC' + \smile CA'}{2} = \frac{\smile BA' + \smile CA'}{2} = \frac{\smile BC}{2} = \angle BAC;$$

$$\angle C'AO_1 = \frac{\smile C'B + \smile BA'}{2} = \frac{\smile C'B + \smile AC'}{2} = \frac{\smile AB}{2} = \angle ACB,$$

и следовательно, треугольник AO_1C' подобен треугольнику ABC.

Аналогично проводится доказательство и для остальных пяти треугольников.

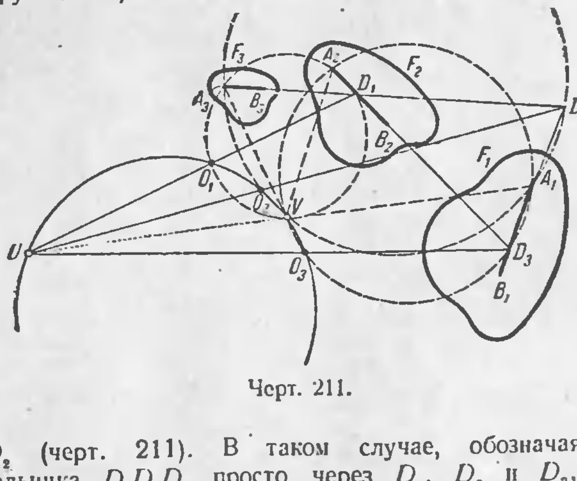
95. Соединим первый центр вращения O_1 треугольника ABC со всеми вершинами треугольника (черт. 210). Точка M лежит в одном из треугольников ABO_1, BCO_1, CAO_1. Если например, точка M лежит внутри (или на границе) треугольника ABO_1 (черт. 210), то $\angle MAB \leqslant \angle O_1AB \leqslant 30^\circ$ (см. задачу 90 г)). Аналогично доказывается, что хоть один из углов MAC, MCB, MBA меньше или равен 30° (вместо треугольников ABO_1, BCO_1, CAO_1 приходится рассматривать треугольники ACO_2, CBO_2, BAO_2, где O_2 — второй центр подобия треугольника).



Черт. 210.

Из доказательства даже следует, что один из углов MAB, MBC, MCA всегда **строго меньше** 30°, за исключением того единственного случая, когда треугольник ABC является равносторонним и точка M совпадает с его центром (в этом случае $\angle MAB = \angle MBC = \angle MCA = 30^\circ$).

96. а), б). Пусть V есть отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников $A_1A_2D_3$ и



Черт. 211.

$A_1A_3D_2$ (черт. 211). В таком случае, обозначая углы треугольника $D_1D_2D_3$ просто через D_1, D_2 и D_3, имеем (черт. 211 [1])):

$$\angle A_1VA_2 = \angle D_3, \quad \angle A_1VA_3 = 180^\circ - \angle D_2$$

и, следовательно,

$$\angle A_2VA_3 = \angle A_3VA_1 - \angle A_2VA_1 = \\ = 180^\circ - \angle D_2 - \angle D_3 = \angle D_1$$

и, значит, окружность, описанная около треугольника $A_2A_3D_1$, тоже проходит через точку V.

Отметим ещё, что в силу построения центра вращения (см. выше, стр. 105, черт. 81, *б*) точка O_1 лежит на окружности, описанной около треугольника $A_2A_3D_1$, точка O_2 — на окружности, описанной около треугольника $A_1A_3D_2$, точка O_3 — на окружности, описанной около треугольника $A_1A_2D_3$; при этом, как мы доказали, все эти окружности проходят ещё через одну точку V.

Обозначим теперь точку пересечения прямых D_2O_2 и D_3O_3 через U. В таком случае имеем (см. черт. 211 [1])):

$$\angle O_2VO_3 = \angle D_2O_2V + \angle D_3O_3V - \angle O_2UO_3$$

(для доказательства достаточно разбить четырёхугольник O_2VO_3U диагональю UV на два треугольника и применить к каждому из этих треугольников теорему о внешнем угле). Но в силу того, что точки D_2, O_2, V и A_1 лежат на одной окружности

$$\angle D_2O_2V = 180^\circ - \angle D_2A_1V$$

и аналогично

$$\angle D_3O_3V = 180^\circ - \angle D_3A_1V,$$

откуда следует:

$$\angle D_2O_2V + \angle D_3O_3V = 180^\circ$$

и, значит,

$$\angle O_2VO_3 = 180^\circ - \angle O_2UO_3,$$

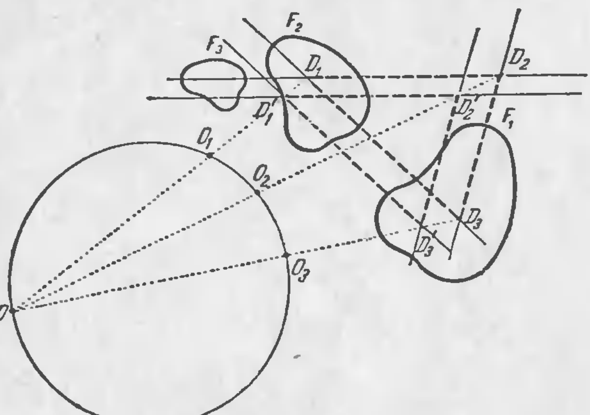
т. е. точки O_2, O_3, U и V лежат на одной окружности.

Обозначим теперь общую точку пересечения окружностей, описанных около треугольников $B_1B_2D_3$, $B_1B_3D_2$ и $B_2B_3D_1$

[1]) См. сноску [2]) на стр. 50.

через $\overline{V}$. Аналогично только что доказанному получаем, что точки O_2, O_3, U и $\overline{V}$ лежат на одной окружности. Таким образом, мы видим, что пять точек O_2, O_3, V, $\overline{V}$ и U лежат на одной окружности. Точно так же можно получить, что точки O_1, O_3, V, $\overline{V}$ лежат на одной окружности. Но из того, что точки O_1, O_3, V, $\overline{V}$ и O_2, O_3, V, $\overline{V}$ лежат в отдельности на одной окружности, следует, что обе эти окружности совпадают между собой и с окружностью подобия фигур F_1, F_2, F_3; этим завершается доказательство теоремы задачи б). Далее, мы видели, что точка U пересечения D_2O_2 и D_3O_3 лежит на этой окружности. Другими словами, прямая D_2O_2 проходит через отличную от O_3 точку U пересечения прямой D_3O_3 с окружностью подобия фигур F_1, F_2 и F_3; точно так же показывается, что и прямая D_1O_1 проходит через эту же точку, чем завершается доказательство теоремы задачи а).

в) Предположим сначала, что стороны треугольника $D_1'D_2'D_3'$ параллельны соответствующим сторонам треугольника $D_1D_2D_3$ (черт. 212). Из того, что O_3 есть центр вращения



Черт. 212.

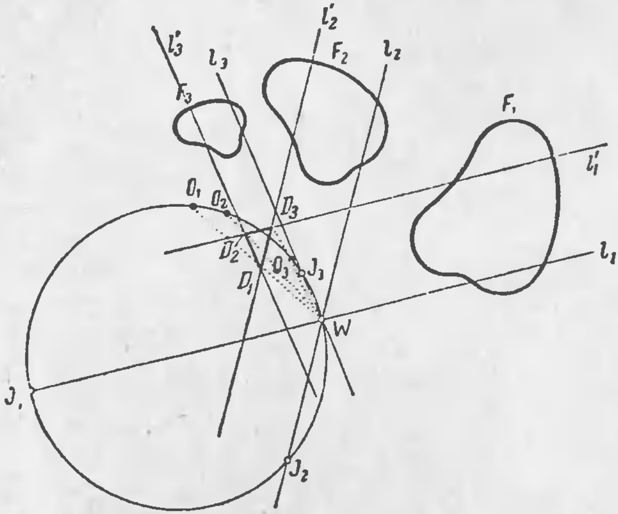
фигур F_1 и F_2, легко вывести, что расстояния прямых $D_2'D_3'$ и $D_1'D_3'$ от O_3 пропорциональны расстояниям D_2D_3 и D_1D_3 от O_3. Отсюда следует, что точка D_3' лежит на прямой O_3D_3.

Точно так же показывается, что D_2' лежит на O_2D_2 и D_1 лежит на O_1D_1. Учитывая результат задачи а), мы получаем отсюда, что прямые D_1D_1', D_2D_2' и D_3D_3' пересекаются в одной точке O, которая, очевидно, является центром подобия треугольников $D_1D_2D_3$ и $D_1'D_2'D_3'$; эта точка лежит на окружности подобия фигур F_1, F_2 и F_3.

Предположим теперь, что стороны треугольника $D_1'D_2'D_3'$ не параллельны соответствующим сторонам треугольника $D_1D_2D_3$. Пусть A_1B_1 и A_1C_1, A_2B_2 и A_2C_2, A_3B_3 и A_3C_3 — три пары соответствующих друг другу отрезков фигур F_1, F_2 и F_3; $D_1D_2D_3$ и $D_1'D_2'D_3'$ — треугольники, сторонами которых являются прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3, соответственно A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 (см. черт. 105, *в* в тексте). Треугольники $D_1D_2D_3$ и $D_1'D_2'D_3'$ будут подобны, так как угол между прямыми A_1B_1 и A_1C_1 фигуры F_1 равен углу между соответствующими им прямыми A_2B_2 и A_2C_2 фигуры F_2 и между прямыми A_3B_3 и A_3C_3 фигуры F_3. Центр вращения треугольников $D_1D_2D_3$ и $D_1'D_2'D_3'$ лежит на окружности, проходящей через точки D_3, D_3' и A_1 (см. построение центра вращения двух фигур на стр. 105). Но так как $\angle D_3A_1D_3' = \angle D_3A_2D_3'$, то эта окружность проходит также и через точку A_2. Таким образом, центр вращения треугольников $D_1D_2D_3$ и $D_1'D_2'D_3'$ лежит на окружности, описанной около треугольника $A_1A_2D_3$. Аналогично центр вращения лежит на окружностях, описанных около треугольников $A_1A_3D_2$ и $A_2A_3D_1$. В силу задачи б) точка пересечения этих окружностей принадлежит окружности подобия фигур F_1, F_2, F_3 (ср. черт. 105, *в* и 105, *б*).

97. а) Пусть l_1, l_2, l_3 — три соответствующие прямые фигур F_1, F_2 и F_3, пересекающиеся в одной точке W; l_1' — прямая фигуры F_1, параллельная l_1, l_2', l_3' — прямые фигур F_2 и F_3, соответствующие прямой l_1' фигуры F_1, и $D_1D_2D_3$ — треугольник, сторонами которого являются прямые l_1', l_2', l_3' (черт. 213). Очевидно, что $l_2' \parallel l_2$, $l_3' \parallel l_3$. Далее, в силу того, что O_3 есть центр вращения фигур F_1 и F_2, расстояния от O_3 до прямых l_1 и l_2 пропорциональны расстояниям от O_3 до прямых l_1' и l_2'. Отсюда следует, что прямая O_3D_3 проходит

через точку W. Точно так же доказывается, что прямые O_2D_2 и O_1D_1 проходят через точку W. После этого остаётся только применить результат задачи 96 а).



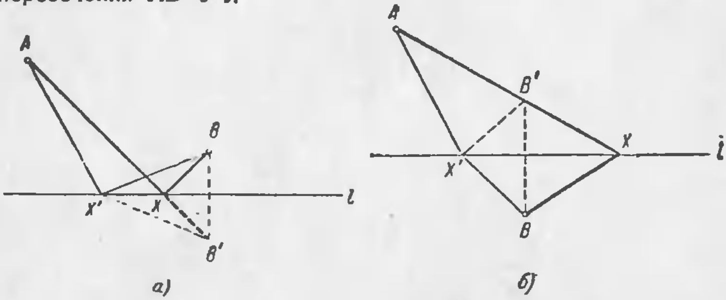
Черт. 213.

б) Отметим прежде всего, что угол D_1 треугольника $D_1D_2D_3$ (черт. 213) не зависит от выбора прямых l_1', l_2', l_3'; это есть угол поворота центрально-подобного вращения, переводящего F_2 в F_3. Далее, отношение расстояний от точки O_1 до прямых l_2' и l_3' не зависит от выбора этих прямых: оно равно коэффициенту подобия фигур F_2 и F_3. Отсюда следует, что и углы $O_1D_1D_2$ и $O_1D_1D_3$ имеют постоянное значение. Если теперь J_2 и J_3 — точки пересечения прямых l_2 и l_3 с окружностью подобия фигур F_1, F_2 и F_3, то $\angle O_1WJ_2 = \angle O_1D_1D_3$, $\angle O_1WJ_3 = \angle O_1D_1D_2$; дуги O_1J_2 и O_1J_3 имеют постоянную величину и, следовательно, точки J_2 и J_3 не зависят от выбора прямых l_1, l_2 и l_3. Точно так же и прямая l_1 пересекает окружность подобия фигур F_1, F_2 и F_3 в фиксированной точке J_1.

Предоставляем читателю доказать самостоятельно, что обратно, если U есть произвольная точка окружности подобия фигур F_1, F_2 и F_3, то прямые UJ_1, UJ_2 и UJ_3 — соответствующие друг другу прямые этих фигур.

§ 2

98. а) Пусть B' — точка, симметричная B относительно прямой l (черт. 214, *а*). Если X' — произвольная точка на l, то $AX' + X'B = AX' + X'B'$. Следовательно, сумма $AX' + BX'$ будет наименьшей, когда сумма $AX' + B'X'$ будет наименьшей, т. е. когда X' совпадает с точкой X пересечения AB' с l.

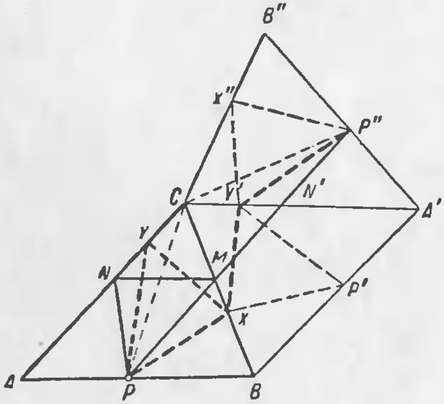


Черт. 214.

б) Пусть B' — точка, симметричная B относительно l (черт. 214, *б*). Если X' — произвольная точка l, то $AX' - B'X' \leqslant AB'$. А так как $AX' - BX' = AX' - B'X'$, то разность $AX' - BX'$ будет наибольшей, когда X' совпадает с точкой X пересечения AB' с l.

99. а) Первое решение. Пусть PXY — произвольный треугольник, вписанный в ABC, одна из вершин которого совпадает с точкой P. Отразим треугольник ABC вместе с треугольником PXY от прямой BC; полученный треугольник $A'BC$ и вписанный в него треугольник $P'XY'$ отразим от прямой CA' (черт. 215). Так как в обозначениях черт. 215 $XY = XY'$ и $YP = Y'P''$, то периметр треугольника PXY равен длине ломаной $PXY'P''$. Поэтому периметр $\triangle PXY$ будет наименьшим в том случае, когда наименьшей будет длина ломаной $PXY'P''$.

Далее могут представиться две возможности. Если отрезок PP'' пересечёт прямую BC между точками B и C (а следовательно, и прямую CA' между точками C и A'), то он будет короче любой ломаной $PXY'P''$ и искомый треугольник будет определён (треугольник PMN на черт. 215; M — точка пересечения PP'' с BC, N — точка, симметричная точке N' пересечения PP'' с CA' относительно BC). Если же отрезок PP

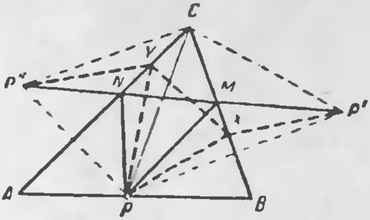


Черт. 215.

пересечёт прямую BC вне отрезка BC, то кратчайшей из ломаных $PXY'P''$ будет та, для которой точки X и Y' совпадают с точкой C. В этом случае искомый треугольник вырождается в дважды взятый отрезок PC.

Остаётся выяснить, когда будет иметь место тот или иной случай. Для этого заметим, что треугольник $A'B''C$ получается из треугольника ABC вращением вокруг точки C на угол, равный удвоенному углу C треугольника (ибо $A'B''C$ получается из ABC последовательными симметриями относительно прямых BC и CA', образующих угол C; см. § 1 гл. II первой части, стр. 50); поэтому $\angle PCP'' = 2\angle C$. Отсюда сразу следует, что если $\angle C < 90°$, то прямая PP'' пересечёт сторону BC треугольника, если же $\angle C \geqslant 90°$, то PP'' пересечёт прямую BC либо в самой точке C, либо в точке, лежащей на продолжении отрезка BC за точку C.

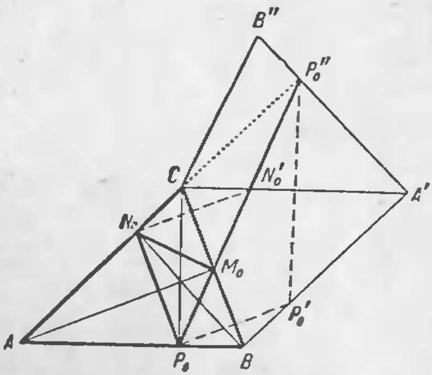
В т о р о е р е ш е н и е. Пусть снова PXY — произвольный треугольник, вписанный в $\triangle ABC$; P' и P'' — точки, симметричные точке P относительно BC и CA (черт. 216). Так как $PX = P'X$ и $PY = P''Y$, то периметр $\triangle PXY$ равен длине ломаной $P'XYP''$. Поэтому, если $P'P''$ пересечёт боковые стороны AC и BC треугольника ABC в точках M и N, то треугольник PMN и есть искомый. Если же $P'P''$ не пересечёт отрезки AC и BC, то искомый треугольник выродится в дважды взятый отрезок PC. Аналогично первому решению можно показать, что первый случай имеет место, когда угол C треугольника меньше $90°$, а второй — когда $\angle C \geqslant 90°$.



Черт. 216.

Отметим, что принципиально второе решение мало отличается от первого (ср. черт. 215 и 216).

б) Первое решение. Будем считать, что угол при вершине C заданного треугольника острый. Пусть P — произвольная точка стороны AB; построим согласно первому решению задачи а) вписанный в ABC треугольник PMN наименьшего возможного периметра, равного длине отрезка PP'' (см. черт. 215). Остаётся только выбрать точку P так, чтобы соответствующий ей отрезок PP'' был наименьшим. Вспомним, что $\angle PCP'' = 2\angle C$, т. е. не зависит от выбора точки P; поэтому основание PP'' равнобедренного треугольника PCP'' с данным углом $2\angle C$ при вершине будет наименьшим, если будет наименьшей боковая сторона CP. Далее надо рассмотреть отдельно два случая.



Черт. 217.

1°. Углы при вершинах A и B треугольника ABC острые (треугольник остроугольный). В этом случае отрезок CP имеет наименьшую величину, когда точка P является основанием P_0 высоты CP_0 треугольника ABC (черт. 217). Легко доказать, что и вершины M_0 и N_0 треугольника $P_0M_0N_0$, получаемого при таком выборе точки P_0, являются основаниями высот треугольника ABC. Действительно, из черт. 217 следует, что

$$\angle N_0P_0A = \angle CP_0A - \angle CP_0N_0 =$$
$$= 90^\circ - \angle CP_0''N_0 = 90^\circ - \frac{180^\circ - 2\angle C}{2} = \angle C;$$

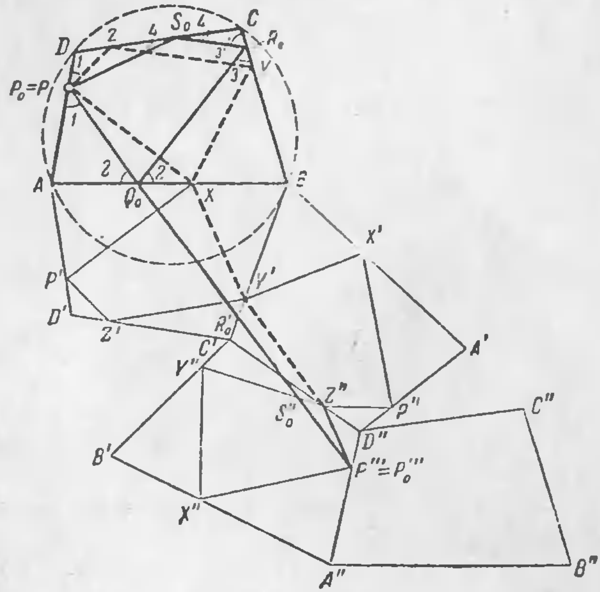
значит, вокруг четырёхугольника BCN_0P_0 можно описать окружность и $\angle BN_0C = \angle CP_0B = 90^\circ$. Так же доказывается, что $AM_0 \perp BC$.

2°. Если, например, угол A — прямой или тупой, то отрезок CP является наименьшим, когда точка P совпадает с вершиной A треугольника. Отсюда следует, что искомый треугольник вырождается в дважды взятую высоту AM_0.

Второе решение. При решении задачи б) можно также исходить и из второго решения задачи а). Так как периметр треугольника MNP (см. черт. 216) равен $P'P''$; $CP' = CP'' = CP$ и $\angle P'CP'' = 2\angle C$, то задача сводится к отысканию такой точки P, что CP имеет наименьшее значение. Далее — см. первое решение задачи.

100. Начнём с решения задачи, аналогичной задаче 99 а), а именно: предположим, что на стороне AD четырёхугольника $ABCD$ задана точка P, и поставим своей целью найти вписанный в $ABCD$ четырёхугольник наименьшего возможного периметра, одна вершина которого совпадает с точкой P. Эта задача допускает решение, близкое к первому решению задачи 99 а). Отразим четырёхугольник $ABCD$ от стороны AB; затем отразим полученный четырёхугольник $ABC'D'$ от стороны BC'; наконец, отразим полученный четырёхугольник $A'BC'D''$ от стороны $C'D''$ в положение $C'D''A''B'$ (черт. 218,*а*). Пусть при этом произвольный вписанный в $ABCD$ четырёхугольник $PXYZ$ займёт последовательно положения $P'XY'Z'$, $P''X'Y'Z''$ и $P'''X''Y''Z''$; периметр четырёхугольника $PXYZ$ равен, очевидно, длине ломаной $PXY'Z''P'''$. Отсюда следует, что если прямая PP''' пересекает стороны AB, BC' и $C'D''$ построенных четырёхугольников, то точки пересечения определят вершины искомого четырёхугольника; если же PP''' не пересекает все эти три отрезка, то искомый четырёхугольник будет вырожденным (т. е. треугольником, одна из вершин которого совпадает с вершиной четырёхугольника $ABCD$, или дважды взятой диагональю четырёхугольника $ABCD$).

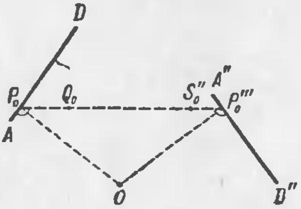
Теперь перейдём к решению исходной задачи. Нам надо найти такую точку P на стороне AD четырёхугольника $ABCD$, чтобы отрезок PP''', где P''' — соответствующая P точка на стороне $A''D''$ четырёхугольника $A''B'C'D''$, был кратчайшим (ср. с решением задачи 99 б)). Как мы видели в решении



Черт. 218, *а*.

задачи 99 б), если отрезки AD и $A''D''$ не являются параллельными и одинаково направленными, то такой точкой является основание перпендикуляра, опущенного из центра вращения отрезков AD и $A''D''$ на прямую AD (если это основание лежит на отрезке AD), или ближайший к основанию этого перпендикуляра конец отрезка AD (если основание рассматриваемого перпендикуляра лежит вне AD). Если отрезки AD и $A''D''$ параллельны и одинаково направлены, то расстояния от всех точек P отрезка AD до соответствующих им точек P''' отрезка $A''D''$ имеют одну и ту же величину.

Задача будет иметь (единственное) решение в собственном смысле слова только в первом случае, если при этом основание P_0 перпендикуляра, опущенного из центра O вращения отрезков AD и $A''D''$ на прямую AD, находится на стороне AD и прямая P_0P_0''', где P_0''' есть основание перпендикуляра, опущенного из O на $A''D''$, пересекает отрезки AB, BC' и $C'D''$. В последнем случае точки пересечения отрезка P_0P_0''' с отрезками AB, BC', $C'D''$ определяют искомый четырёхугольник $P_0Q_0R_0S_0$ (см. черт. 218, *а*). При этом, как нетрудно видеть, $\angle P_0'''P_0A = \angle P_0P_0'''D''$ (см. черт. 218, *б*), откуда следует, что стороны P_0Q_0 и P_0S_0 искомого четырёхугольника образуют одинаковые углы со стороной AD четырёхугольника $ABCD$. Далее, из равенства вертикальных углов, образованных прямой P_0P_0''' с прямыми AB, BC' и $C'D''$, следует, что стороны P_0Q_0 и Q_0R_0 четырёхугольника $P_0Q_0R_0S_0$ образуют равные углы со стороной AB четырёхугольника $ABCD$, стороны Q_0R_0 и R_0S_0 образуют равные углы со стороной BC и стороны R_0S_0 и S_0P_0 образуют равные углы со стороной CD[1]). Далее, имеем в обозначениях черт. 218, *а*:



Черт. 218, *б*.

$$\angle A + \angle C = (180^\circ - \angle 1 - \angle 2) + (180^\circ - \angle 3 - \angle 4) = \\ = 360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4),$$

$$\angle B + \angle D = (180^\circ - \angle 2 - \angle 3) + (180^\circ - \angle 4 - \angle 1) = \\ = 360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4),$$

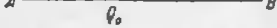
$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ.$$

Таким образом, поставленная задача имеет решения в собственном смысле слова только в том случае, если четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность.

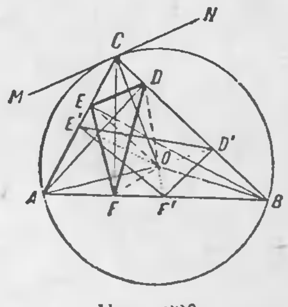
---

[1]) Таким образом, доказано, что если $PQRS$ — вписанный в $ABCD$ четырёхугольник наименьшего возможного периметра, то любые две его последовательные стороны образуют одинаковые углы с той стороной $ABCD$, на которой они пересекаются. Это предложение можно доказать и более просто. Действительно, если, например, $\angle SPD \neq \angle QPA$, то мы можем, не меняя положения вершин Q, R и S четырёхугольника $PQRS$, так изменить положение вершины P, что периметр четырёхугольника $PQRS$ уменьшится (см. решение задачи 98 а)).

Пусть теперь четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность (т. е. $\angle B + \angle D = 180°$); $D''A''B''C''$ — четырёхугольник, симметричный $D''A''B'C'$ относительно $D''A''$. Так как четырёхугольник $BC'D''A'$ получается из $ABCD$ вращением вокруг точки B на угол $2\angle B$ (ср. с решением задачи 99 а)), а $D''A''B''C''$ получается из $D''A'BC'$ вращением вокруг D'' на угол, равный $2\angle D$, и $2\angle B + 2\angle D = 360°$, то четырёхугольник $A''B''C''D''$ получается из $ABCD$ при помощи параллельного переноса (см. § 2 гл. I первой части, стр. 36). Следовательно, если $ABCD$ можно вписать в окружность, то отрезок $A''D''$ параллелен отрезку AD и одинаково направлен с ним. Таким образом, расстояние между произвольной точкой P отрезка AD и соответствующей ей точкой P''' отрезка $A''D''$ не зависит от положения точки P, а значит, наша задача допускает бесчисленное множество решений, соответствующих всем таким положениям точки P, что отрезок PP''' пересекает отрезки AB, BC' и $C'D''$. Очевидно, что стороны всех вписанных в четырёхугольник $ABCD$ четырёхугольников, периметр которых имеет наименьшее возможное значение, будут параллельны между собой (см. черт. 219).



Черт. 219.



Черт. 220.

101. Если D, E, F — основания высот треугольника ABC, то $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ (см. черт. 220); поэтому $\frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA}$. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ и $\angle CED = \angle CBA$. Пусть MN — касательная к описанной окружности в точке C. Очевидно, $\angle MCA = \angle CBA \left(= \frac{1}{2} \smile AC\right)$. Таким образом, $\angle MCE = \angle CED$, т. е. $ED \parallel MN \perp OC$. Точно так же показывается, что $EF \perp OA$, $DF \perp OB$, т. е. треугольник DEF — искомый.

Если треугольник ABC — остроугольный, то центр O описанной окружности лежит внутри него (черт. 220); поэтому $S_{\triangle ABC} = S_{ODCE} + S_{OEAF} + S_{OFBD}$. Но диагонали последних трёх четырёхугольников взаимно перпендикулярны; следовательно, их площади равны половине произведения диагоналей. Таким образом,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} OC \cdot DE + \frac{1}{2} OA \cdot EF + \frac{1}{2} OB \cdot FD = \\ = \frac{1}{2} R(DE + EF + FD), \qquad (*)$$

где R — радиус описанной окружности.

Если $F'D'E'$ — какой угодно треугольник, вписанный в треугольник ABC, то

$$S_{\triangle ABC} = S_{OD'CE'} + S_{OE'AF'} + S_{OF'BD'} = \\ = \frac{1}{2} OC \cdot D'E' \sin\gamma + \frac{1}{2} OA \cdot E'F' \sin\alpha + \frac{1}{2} OB \cdot F'D' \sin\beta,$$

где γ, α и β — углы между диагоналями четырёхугольников $OD'CE'$, $OE'AF'$ и $OF'BD'$; поэтому

$$S_{\triangle ABC} \leqslant \frac{1}{2} R(D'E' + E'F' + F'D').$$

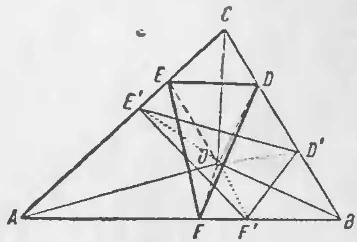
Сравнивая последнее соотношение с соотношением (*), найдём, что

$$DE + EF + FD \leqslant D'E' + E'F' + F'D'.$$

Таким образом, из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет тот, вершинами которого служат основания высот заданного треугольника.

102. Прежде всего найдём точку, расстояния которой до вершин A, B и C треугольника относятся как числа a, b и c. Построение такой точки легко осуществить, если воспользоваться тем, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек известно, есть окружность (см. сноску на стр. 102). При этом можно показать, что таких точек, вообще говоря, имеется две, причём одна из них находится вне, а другая — внутри окружности, описанной вокруг заданного треугольника. Следовательно, одна из этих двух точек обязательно находится вне треугольника ABC. Затем следует рассмотреть два случая.

1°. Одна из построенных точек (обозначим её через O) находится внутри ABC (черт. 221). Впишем в ABC треугольник DEF, стороны которого перпендикулярны к отрезкам OA, OB и OC (см. задачу 47 б), стр. 81). Очевидно, имеем:



Черт. 221.

$$S_{\triangle ABC}=S_{OEAF}+S_{OFBD}+S_{ODCE};$$

так как $OA \perp EF$, $OB \perp FD$, $OC \perp DE$ и $OA=ak$, $OB=bk$, $OC=ck$, то

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\,OA\cdot EF+\frac{1}{2}\,OB\cdot FD+\frac{1}{2}\,OC\cdot DE=$$
$$=\frac{1}{2}\,k\,(a\cdot EF+b\cdot FD+c\cdot DE). \qquad (*)$$

Пусть теперь $D'E'F'$ — произвольный треугольник, вписанный в ABC; α, β, γ — углы между диагоналями четырёхугольников $OE'AF'$, $OF'BD'$, $OD'CE'$. В таком случае (ср. с решением задачи 101)

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\,OA\cdot E'F'\sin\alpha+\frac{1}{2}\,OB\cdot F'D'\sin\beta+\frac{1}{2}\,OC\cdot D'E'\sin\gamma\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\,k\,(a\cdot E'F'+b\cdot F'D'+c\cdot D'E')$$

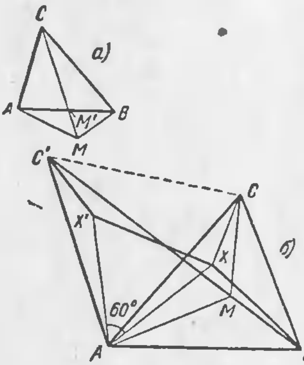
и, значит,

$$a\cdot EF+b\cdot FD+c\cdot DE\leqslant a\cdot E'F'+b\cdot F'D'+c\cdot D'E',$$

т. е. треугольник DEF и есть искомый.

2°. Если точка O лежит, например, на стороне AB треугольника ABC, то искомый треугольник вырождается в дважды взятую высоту треугольника ABC, опущенную на сторону AB; если точка O находится вне треугольника ABC, то искомый треугольник вырождается в дважды взятую высоту треугольника ABC, опущенную на ту сторону треугольника, по отношению к которой точка O и треугольник ABC находятся по разные стороны. Доказательство мы предоставляем читателю.

103. Искомая точка M не лежит вне треугольника ABC, так как в противном случае легко указать такую точку M', что $AM'+BM'+CM'<AM+BM+CM$ (черт. 222, *а*). Пусть теперь X — произвольная точка внутри треугольника ABC (черт. 222, *б*). Повернём треугольник ACX вокруг точки A на $60°$ в направлении от B к C в положение $AC'X'$. Так как $AX=XX'$ (треугольник AXX' равносторонний) и $CX=C'X'$, то сумма расстояний от точки X до вершин треугольника равна длине ломаной $BXX'C'$. Остаётся выбрать точку M так, чтобы длина ломаной $BMM'C'$ была наименьшей.



Черт. 222.

Рассмотрим отдельно два случая.

1°. Отрезок $C'B$ пересекает сторону AC треугольника ABC; этот случай имеет место, когда $\angle BCC'<180°$, $\angle BAC'<180°$ или, так как $\angle BCC'=$ $=\angle BCA+\angle ACC'=\angle BCA+60°$ и $\angle BAC'=\angle BAC+$ $+\angle CAC'=\angle BAC+60°$, когда углы C и A треугольника будут меньше $120°$. В этом случае, если на отрезке $C'B$ можно найти такую точку M, что $\angle AMC'=60°$, то для этой точки мы будем иметь:

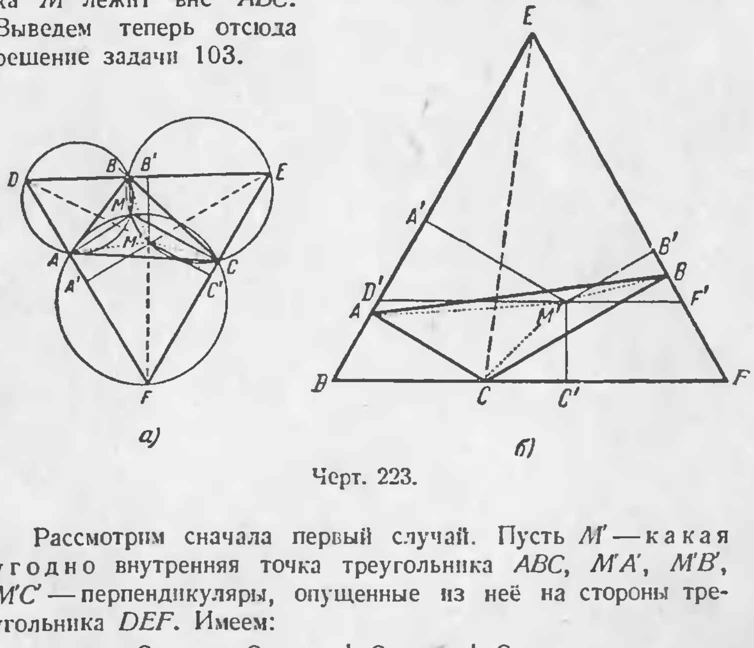
$$AM+MC+MB=C'B,$$

и следовательно, она и будет являться искомой. Для этой точки M имеем: $\angle AMB=\angle CMB=\angle AMC=120°$ (M — точка, из которой все стороны треугольника ABC видны под равными углами); очевидно, для того чтобы на отрезке $C'B$ была такая точка M, нужно, чтобы $\angle CBA$ был меньше $120°$. Если же угол $CBA\geqslant 120°$, то искомой точкой будет вершина B треугольника ABC.

2°. Отрезок $C'B$ не пересекает сторону AC треугольника ABC; например, точка C' расположена по другую сторону от прямой BC, чем треугольник ABC ($\angle C\geqslant 120°$). В этом случае кратчайшей ломаной $C'X'XB$ будет ломаная $C'CB$ и искомой точкой будет вершина C треугольника ABC. Точно так же, если $\angle A \geqslant 120°$, то искомой точкой будет вершина A.

104. а) Если DEF — правильный треугольник, описанный вокруг треугольника ABC, и AM, BM, CM — перпендикуляры к сторонам треугольника DEF, то, очевидно, $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$ (черт. 223, a). Отсюда следует, что M — точка пересечения дуг окружностей, построенных на сторонах треугольника ABC и вмещающих углы в $120°$. Найдя точку M, мы без труда построим треугольник DEF. Точка M будет лежать внутри ABC, если ни один из углов ABC не превышает $120°$; если, например, $\angle C = 120°$, то точка M совпадёт с вершиной C; если $\angle C > 120°$, то точка M лежит вне ABC.

Выведем теперь отсюда решение задачи 103.



Черт. 223.

Рассмотрим сначала первый случай. Пусть M' — *какая угодно* внутренняя точка треугольника ABC, $M'A'$, $M'B'$, $M'C'$ — перпендикуляры, опущенные из неё на стороны треугольника DEF. Имеем:

$$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DEM'} + S_{\triangle EFM'} + S_{\triangle FDM'}$$

или, если a и h суть сторона и высота правильного треугольника DEF,

$$\frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a \cdot M'A' + \frac{1}{2} a \cdot M'B' + \frac{1}{2} a \cdot M'C',$$

т. е.

$$M'A'+M'B'+M'C'=h.$$

Но $M'A \geqslant M'A'$, $M'B \geqslant M'B'$, $M'C \geqslant M'C'$ (ибо перпендикуляр короче наклонной); поэтому

$$M'A+M'B+M'C \geqslant h,$$

причём равенство достигается только в том случае, когда M' совпадает с M. Таким образом, точка M — искомая.

Если точка M совпадает с C, то точка C — искомая. Наконец, если $\angle C > 120°$, то опять сумма расстояний от точки C до вершин треугольника будет меньше, чем сумма расстояний до вершин треугольника от любой другой точки. Для доказательства опишем вокруг ABC равнобедренный треугольник DEF так, чтобы было $CA \perp DE$, $CB \perp EF$ (черт. 223, *б*). Пусть M' — произвольная внутренняя точка треугольника ABC, A', B', C' — основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны треугольника DEF, $D'EF'$ — треугольник, подобный DEF, основание $D'F'$ которого проходит через M'. В таком случае имеем:

$$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle CDE}+S_{\triangle CEF},$$

откуда

$$CA+CB=h,$$

где h — высота треугольника DEF, опущенная на боковую сторону. Аналогично получаем:

$$M'A'+M'B'=h',$$

где $h'=kh$ — высота треугольника $D'EF'$ (k — коэффициент подобия, $k<1$).

Обозначим высоты треугольников DEF и $D'EF'$, опущенные на основания, через H и $H'=kH$. Так как $\angle E=180°-\angle C<60°$, то $DF<DE$, $H>h$. Теперь имеем:

$$M'A'+M'B'+M'C'=h'+(H-H')=H-(H'-h')=$$
$$=H-k(H-h)>H-(H-h)=$$
$$=h=CA+CB.$$

А так как, очевидно,

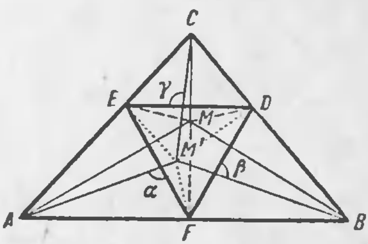
$$M'A' + M'B' + M'C' \leqslant M'A + M'B + M'C,$$

то

$$M'A + M'B + M'C > CA + CB,$$

что и требовалось доказать.

б) Если AM, BM и CM — перпендикуляры к сторонам равностороннего треугольника DEF, вписанного в треугольник ABC, то, очевидно, $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$ (черт. 224). Поэтому для решения задачи надо найти точку M, из которой все стороны треугольника ABC видны под углом $120°$, и затем вписать в треугольник ABC треугольник DEF, стороны которого перпендикулярны к AM, BM и CM (см. задачу 47 б), стр. 81). При этом вершины DEF будут лежать на сторонах треугольника ABC, а не на их продолжениях, если все углы треугольника ABC меньше $120°$.



Черт. 224.

Предположим, что имеет место именно этот случай. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = S_{MDCE} + S_{MEAF} + S_{MFBD} =$$
$$= \frac{1}{2} DE \cdot MC + \frac{1}{2} EF \cdot MA + \frac{1}{2} FD \cdot MB =$$
$$= \frac{1}{2} DE\,(MA + MB + MC).$$

Пусть теперь M' — произвольная точка внутри треугольника ABC, α, β, γ — углы, которые прямые $M'A$, $M'B$ и $M'C$ образуют с соответствующими сторонами треугольника DEF. В таком случае

$$S_{\triangle ABC} = S_{M'DCE} + S_{M'EAF} + S_{M'FBD} =$$
$$= \frac{1}{2} DE \cdot M'C \sin\gamma + \frac{1}{2} EF \cdot M'A \sin\alpha + \frac{1}{2} FD \cdot M'B \sin\beta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} DE \cdot M'C + \frac{1}{2} EF \cdot M'A + \frac{1}{2} FD \cdot M'B =$$
$$= \frac{1}{2} DE\,(M'A + M'B + M'C).$$

Отсюда следует:

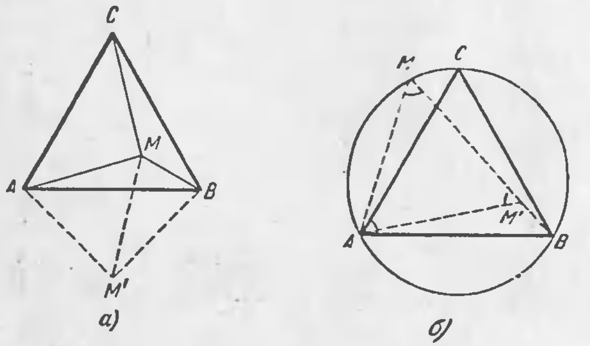
$$MA+MB+MC \leqslant M'A+M'B+M'C,$$

что и требовалось доказать (ср. с решением задачи 101).

105. а) Первое решение. Повернём треугольник CAM вокруг точки A на $60°$ в положение ABM' (черт. 225, *а*). Тогда $MM'=AM'=AM$, $CM=BM'$. Но $BM \leqslant BM'+MM'$ и, следовательно,

$$BM \leqslant AM+CM.$$

При этом $BM=BM'+MM'$, лишь если M' лежит на отрезке BM. Так как $\angle AMM'=60°$, то в этом случае

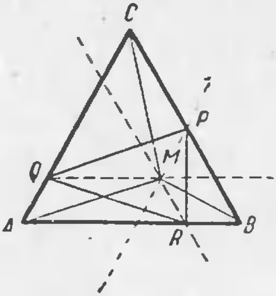


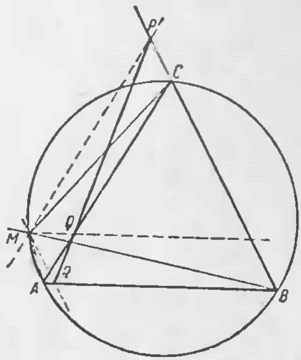
Черт. 225.

$\angle AMB=60°$; это означает, что точка M лежит на дуге AC окружности, описанной около треугольника ABC (см. черт. 225, б).

Второе решение. Проведём через точку M прямые MP, MQ и MR параллельно сторонам AC, AB и BC треугольника ABC (черт. 226, *а*). Четырёхугольники $MQAR$, $MPBR$, $MPCQ$, как нетрудно видеть, будут равнобедренными трапециями; следовательно, $MA=QR$, $MB=PR$, $MC=PQ$. Таким образом, расстояния MA, MB и MC равны сторонам треугольника PQR, откуда следует, что $MA+MC \geqslant MB$.

Равенство $MA+MC=MB$ имеет место только в том случае, когда $RQ+QP=PR$, т. е. точка Q лежит на отрезке PR (черт. 226, *б*). В этом случае $\angle RMA = \angle RQA$, $\angle PMC = \angle PQC$, $\angle RQA = \angle PQC$; значит, $\angle RMA = \angle CMP$, $\angle AMC = \angle RMP = 120°$ и, следовательно, точка M лежит на дуге AC окружности, описанной около треугольника ABC

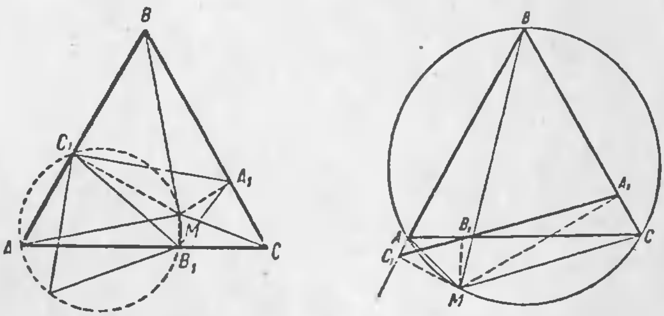




а) б)

Черт. 226.

Третье решение. Опустим из точки M перпендикуляры MA_1, MB_1 и MC_1 на стороны треугольника ABC (черт. 227, *а*). Вокруг четырёхугольника AC_1MB_1 можно



а) б)

Черт. 227.

описать окружность с диаметром AM; так как $\angle B_1AC_1 = 60°$, то B_1C_1 — сторона равностороннего треугольника, вписанного в эту окружность. Поэтому $B_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, MA$; аналогично

$A_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} MC$, $A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} MB$. Но из треугольника $A_1B_1C_1$ имеем:

$$A_1C_1 \leqslant A_1B_1 + B_1C_1,$$

откуда

$$MB \leqslant MA + MC.$$

При этом $MB = MA + MC$, если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, причём B_1 расположена между A_1 и C_1 (черт. 227, *б*). Мы утверждаем, что в этом случае M лежит на дуге AC окружности, описанной около треугольника ABC. В самом деле, $\angle C_1MA = \angle C_1B_1A$, $\angle A_1MC = \angle A_1B_1C$. Но так как в рассматриваемом случае $\angle C_1B_1A = \angle A_1B_1C$, то $\angle C_1MA = \angle A_1MC$ и $\angle AMC = \angle C_1MA_1 = 120°$, что и доказывает наше утверждение.

Заметим, что вообще для того чтобы основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки на стороны произвольного треугольника, лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы заданная точка лежала на окружности, описанной около этого треугольника (см. выше задачу 85 из § 1).

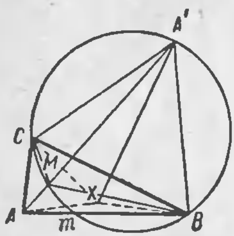
Четвёртое решение. Применим к четырёхугольнику $MABC$ теорему Птолемея (см. задачу 269 из § 4 гл. II третьей части книги), получим:

$$MB \cdot AC \leqslant MA \cdot CB + MC \cdot AB,$$

где знак равенства имеет место лишь в том случае, когда вокруг четырёхугольника $MABC$ можно описать окружность. Но $AC = CB = AB$ и, следовательно,

$$MB \leqslant MA + MC,$$

что и требовалось доказать.



Черт. 228.

б) Построим на стороне BC заданного треугольника ABC вне его правильный треугольник BCA' (черт. 228). Пусть X — произвольная точка плоскости. Из треугольника XAA' имеем:

$$AA' \leqslant XA + XA',$$

причём равенство имеет место лишь в том случае, когда точка X лежит на отрезке AA'. Далее, в силу предложения задачи а)

$$XA' \leqslant XB + XC,$$

причём равенство имеет место лишь тогда, когда точка X лежит на дуге CmB окружности, описанной вокруг треугольника BCA'.

Из полученных соотношений имеем:

$$AA' \leqslant XA + XB + XC.$$

Если M есть точка пересечения AA' с описанной окружностью треугольника $A'BC$, то

$$AA' = MA + MB + MC,$$

т. е.

$$MA + MB + MC \leqslant XA + XB + XC$$

и, следовательно, точка M удовлетворяет условию задачи 103. При помощи простого подсчёта нетрудно убедиться, что если один из углов треугольника ABC равен 120°, то отрезок AA' и дуга CmB пересекутся в вершине этого угла, а если один из углов заданного треугольника больше чем 120°, то они вовсе не пересекутся. В этом последнем случае, как можно доказать, минимальным свойством также будет обладать вершина тупого угла.

106. Рассмотрим прежде всего тот случай, когда числа a, b, c таковы, что сумма двух меньших из них меньше третьего; пусть, например, $a \geqslant b + c$. Для любой точки X имеем:

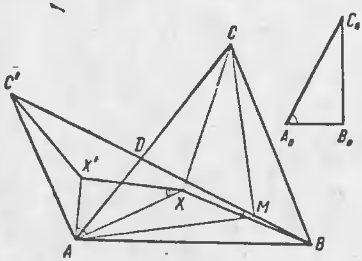
$$a \cdot XA + b \cdot XB + c \cdot XC \geqslant (b + c)\, XA + b \cdot XB + c \cdot XC = \\ = b\,(XA + XB) + c\,(XA + XC) \geqslant b \cdot AB + c \cdot AC$$

(ибо $XA + XB \geqslant AB$, $XA + XC \geqslant AC$), так что сумма $a \cdot XA + b \cdot XB + c \cdot XC$ принимает наименьшее значение, когда точка X совпадёт с точкой A.

Таким образом, остаётся рассмотреть только тот случай, когда существует треугольник, стороны которого равны a, b и c. При рассмотрении этого случая можно итти четырьмя путями, аналогичными решениям задач 103, 104 а), 104 б) и 105.

Первое решение. Пусть $A_0B_0C_0$ — треугольник, стороны которого равны a, b и c, $\alpha = \frac{a}{b}$, $\gamma = \frac{c}{b}$; X — произвольная точка плоскости. Центрально-подобное вращение с центром A, коэффициентом подобия γ и углом поворота, равным углу A_0 треугольника $A_0B_0C_0$ (вращение производится в направлении от B к C), переводит треугольник AXC в треугольник $AX'C'$ (черт. 229). Треугольники $AX'X$ и $A_0B_0C_0$ подобны, ибо, по условию, $\frac{AX'}{AX}=\gamma=\frac{A_0B_0}{A_0C_0}$, $\angle XAX'=\angle B_0A_0C_0$. Из их подобия следует, что $\frac{XX'}{AX}=\frac{a}{b}=\alpha$; $XX'=\alpha\, AX$; кроме того, по построению, $C'X'=\gamma CX$. Следовательно,

$$C'X'+X'X+XB=\gamma\cdot CX+\alpha\cdot AX+BX=\frac{c\cdot CX+a\cdot AX+b\cdot BX}{b}$$



Черт. 229.

и, значит, величина $a\cdot AX+$ $+b\cdot BX+c\cdot CX$ имеет наименьшее значение тогда, когда ломаная $BXX'C'$ имеет наименьшую длину. Здесь возможны следующие случаи.

1°. Прямая BC' пересечёт сторону AC заданного треугольника в некоторой точке D. В таком случае кратчайшей из всех ломаных, соединяющих точки B и C' и пересекающих отрезок AC, является отрезок BC'. Пользуясь тем, что угол AXX' равен углу C_0 треугольника $A_0B_0C_0$, легко найти точку M. Для этого построим на отрезке AD дугу, вмещающую указанный угол, расположенную по ту же сторону от прямой AC, что и точка B. Если эта дуга пересечётся с отрезком BC', то точка пересечения как раз и будет искомой точкой M. Если же построенная дуга не пересечётся с отрезком BC', то искомая точка M должна совпасть с вершиной B треугольника ABC.

2°. Если прямая BC' не пересечёт сторону AC треугольника ABC, то кратчайшей из ломаных $BXX'C'$, пересекающих сторону AC, будет либо ломаная BCC', либо ломаная BAC'. Ясно, что в первом случае искомая точка M совпадёт с вершиной C заданного треугольника, а во втором — с его вершиной A.

Второе решение. Если в треугольнике DEF $EF:FD:DE=a:b:c$, то сумма расстояний до сторон DEF от любой внутренней точки M, умноженных соответственно на числа a, b и c, постоянна. Действительно, из черт. 230 имеем:

$$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle MDE} + S_{\triangle MEF} + S_{\triangle MFD}$$

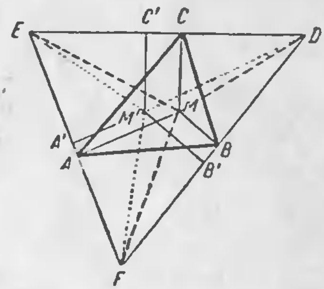
или, если $EF = ak$, $FD = bk$, $DE = ck$,

$$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} MA \cdot ka + \frac{1}{2} MB \cdot kb + \frac{1}{2} MC \cdot kc,$$

$$a \cdot MA + b \cdot BM + c \cdot MC = \frac{2S_{\triangle DEF}}{k} = \text{const}.$$

Здесь A, B и C — основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны треугольника DEF.

Опишем теперь вокруг заданного треугольника ABC треугольник DEF, стороны которого относятся как $a:b:c$, так, чтобы перпендикуляры к сторонам DEF, восставленные в точках A, B и C, пересекались в одной точке M (построение аналогично построению в задаче 104 а)). Если точка M лежит внутри треугольника ABC, то она удовлетворяет нашему минимальному условию; доказательство этого проводится, как в решении задачи 104 а). Если же точка M лежит вне треугольника ABC, то условию задачи удовлетворяет одна из вершин треугольника.



Черт. 230.

Третье решение. Впишем в данный треугольник ABC треугольник DEF, стороны которого относятся как $a:b:c$, так, чтобы перпендикуляры, опущенные из вершин ABC на стороны DEF, пересекались в одной точке M (построение аналогично построению задачи 104 б)).

В случае, когда построенный нами треугольник DEF оказывается вписанным в треугольник ABC в обычном смысле (т. е. все его вершины лежат на сторонах треугольника ABC, но не на их продолжениях), аналогично решению задачи 104 б) показывается, что искомой точкой является точка M. В противном случае ответом задачи служит одна из вершин треугольника ABC.

Четвёртое решение. Воспользуемся следующим предложением, обобщающим результат задачи 105 а): если в треугольнике ABC $BC:CA:AB = a:b:c$, то для любой точки M плоскости

$$b \cdot MB \leqslant a \cdot MA + c \cdot MC,$$

причём знак равенства имеет место тогда, когда точка M лежит на соответствующей дуге окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Доказательство этого предложения (которое можно получить несколькими способами аналогично решениям задачи 105 а)), мы предоставляем читателю.

Построим теперь на стороне BC данного треугольника ABC треугольник BCA' такой, что $BC:CA':A'B = a:b:c$, и опишем окружность вокруг этого треугольника. Если X — любая точка плоскости, то из треугольника XAA' следует, что

$$AA' \leqslant XA + XA',$$

причём равенство имеет место лишь для точек отрезка AA'. Кроме того,

$$a \cdot XA' \leqslant b \cdot XB + c \cdot XC,$$

причём равенство выполняется лишь для точек дуги BmC.

Умножив первое из полученных соотношений на a и сложив со вторым, получим:

$$a \cdot AA' \leqslant a \cdot XA + b \cdot XB + c \cdot XC,$$

причём равенство выполняется лишь для точки M пересечения дуги BmC с отрезком AA':

$$a \cdot AA' = a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC.$$

Таким образом,

$$a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC \leqslant a \cdot XA + b \cdot XB + c \cdot XC,$$

т. е. полученная точка M удовлетворяет условию задачи.

Если дуга BmC не пересечётся с отрезком AA', то, как можно видеть, решением задачи явится одна из вершин треугольника ABC.

СПИСОК ЗАДАЧ, ИНЫЕ РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ СОДЕРЖАТСЯ В ДРУГИХ КНИГАХ

В этом списке указаны номера задач, другие решения которых приведены в одной из следующих книг:

1°. Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, М., Учпедгиз, 1948 (книга содержит свыше 400 задач, к которым Д. И. Перепёлкиным написаны подробные решения) — обозначается буквой «А».

2°. Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии, М.—Л., Гостехиздат, 1952 — обозначается буквой «Д».

3°. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии, ч. 2, М., Гостехиздат, 1952 — обозначается буквой «Ш».

Так, например, в правой стороне таблицы против номера 85 стоит А. 72, Д. 87, Ш. 124; это означает, что иные решения задачи 85 имеются в книгах Ж. Адамара (задача 72), Б. Н. Делоне и О. К. Житомирского (задача 87) и Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома (задача 124). Против номера 79 б), рядом с которым в скобках указано: частный случай, стоит А. 122, Ш. 70 а), б), в); следовательно, иные решения задач, являющихся частными случаями задачи 79 б), имеются в книгах Ж. Адамара (задача 122) и Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома (задачи 70 а), б), в)).

№№ задач	Где содержится	№№ задач	Где содержится
12 б) (частный случай)	Ш. 101	50 а)	Д. 86, Ш. 98
13	А. 117, Ш. 79	51 а)	А. 101, Д. 88, Ш. 99
14 а)	А. 36, Д. 36	53 а)	А. 33
19 (частный случай)	Ш. 68 а), б)	57 а)	А. стр. 182—183, Ш. 131
20 а)	Ш. 92	57 б)	А. стр. 187, Ш. 133
22*	Ш. 91	64	А. 105, Д. 64, Ш. 125 а)
25 в)	А. 38	74 а)	А. 113, Ш. 88
31 б)	Ш. 67 б)	79 б) (частный случай)	А. 122, Ш. 70 а), б), в)
40 а), б) (частный случай)	А. 115 а), б)	85	А. 72, Д. 87, Ш. 124
41 а)	А. 119	86 в)	Д. 249, Ш. 117
45 а)	А. 60	87	Ш. 126

СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОГО ТОМА КНИГИ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЛИНЕЙНЫЕ И КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Вып. 1. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 1. Арифметика и алгебра.

Вып. 2. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 2. Геометрия (планиметрия).

Вып. 3. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 3. Геометрия (стереометрия).

Вып. 4. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры.

Вып. 5. А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении.

Вып. 6. Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы.

Вып. 7. И. М. Яглом, Геометрические преобразования. I. Движения и преобразования подобия.

11-3-1

Яглом Исаак Моисеевич.
Геометрические преобразования I.

Редакторы *Э. П. Тихонова* и *В. А. Солодков.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *С. Н. Емельянова.*

Сдано в набор 15/VI 1955 г. Подписано к печати 18/X 1955 г. Бумага 84 $\times$ 108/32. Физ. печ. л. 8,88. Условно-печ. л. 14,56. Уч.-изд. л. 14,80. Тираж 25 000 экз.

Т-08414. Цена книги 5 р. 45 к. Заказ № 618.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР
Главное управление полиграфической промышленности
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова. Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Библиотека
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
кружка

И. М. ЯГЛОМ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I